MATEMATIKAI

ÉS

FIZIKAI LAPOK

11. KÖTET

1902

BOLYAI JÁNOS MATEMATIKAI TÁRSULAT

BUDAPEST 1968

„KULTURA" Budapest, Offers Mathematical and Physical Sets

International ACTA Journals from Hungary

publish original scientific treatises in English, German, French or Russian.

ACTA MATHEMATICA Academiae Scientiarum Hungaricae

Vols 1–18, 1950–1967 with „Hungarica Acta Mathematica" Vol. 1. (1949) and Suppl. to Vol. 5., mostly reprinted

Unbound set	US $	285,-
Cloth bound set	US $	323,-

ACTA PHYSICA Academiae Scientiarum Hungaricae

Vols. 1–23, 1952–1967 with „Hungarica Acta Physica" Vol. 1. (1949) mostly reprinted

Unbound set	US $	264,-
Cloth bound set	US $	312,-

ACTA SCIENTIARUM MATHEMATICARUM

Vols. 1–28, 1922–1967 mostly reprinted

Unbound set	US $	406,-
Cloth bound set	US $	464,-

Published by the University of SZEGED

PUBLICATIONES MATHEMATICAE

Vols. 1–14. 1949–1967 partly reprinted

Unbound set	US $	182,-
Cloth bound set	US $	210,-

Published by the University of DEBRECEN

Soviet Mathematical Reprint

TRUDY SEMINARA PO VEKTORNOMU I TENZORNOMU ANALIZU

Abhandlungen aus dem Seminar für Vektor–und Tensoranalysis
Mémoires du Séminaire pour l'Analyse vectorielle et tensorielle

Vols. 1–13, Moscow–Leningrad, 1933–1966 cloth bound	US $	240,-

Vols. 1–4 are published chiefly in Western languages. Vol. 4 contains the proceedings of the lst International Conference for Tensor Differential Geometry, held in Moscow, 1934. Editors: Professor V. F. Kagan and P. K. Razhevskij.

MATHEMATIKAI

ÉS

PHYSIKAI LAPOK

TIZENEGYEDIK KÖTET

A MATHEMATIKAI ÉS PHYSIKAI TÁRSULAT MEGBIZÁSÁBÓL

SZERKESZTIK

KÖVESLIGETHY RADÓ ÉS RADOS GUSZTÁV

BUDAPEST 1902

A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA TÁMOGATÁSÁVAL KIADJA

A MATHEMATIKAI ÉS PHYSIKAI TÁRSULAT

A kiadásért felelős: Császár Ákos,
a Bolyai János Matematikai Társulat főtitkára
Eredeti kiadásról készült változatlan utánnyomás

Külföldi terjesztés:
KULTURA KÖNYV- ÉS HÍRLAP
KÜLKERESKEDELMI VÁLLALAT
BUDAPEST 62,
P. O. B. 149
This book is a reproduction of the original, published
in Budapest

General Distributors:
KULTURA Hungarian Trading Company
for Books and Newspapers
BUDAPEST 62, P. O. B. 149,
Hungary
Printed in Hungary, 1968

68-496 Felsőoktatási Jegyzetellátó Vállalat

MATHEMATIKAI ÉS PHYSIKAI LAPOK

TIZENEGYEDIK KÖTETÉNEK TARTALMA.

Első füzet.

Második füzet.

Harmadik füzet.

Negyedik és ötödik füzet.

*

Hatodik füzet.

Hetedik füzet.

Nyolczadik füzet.

NÉVSZERINTI TÁRGYMUTATÓ.

Ismertető és önálló dolgozatok.

Physikai Laboratorium.

Vegyesek.

Társulati ügyek.

AZ ALGEBRAI EGÉSZ ALAKOK ELMÉLETÉNEK EGYIK ALAPTÉTELE.

A számelmélet feladata a megszámlálható sokaságok tulajdonságainak megvizsgálása; megszámlálható az oly sokaság, a melynek elemei a közönséges egész számokkal kölcsönösen egyértelmű vonatkozásba hozhatók. A legegyszerűbb megszámlálható sokaság e szerint maga a közönséges számok összessége.

A számelméletnek egyik leghatalmasabb módszere, a melylyel az egész számok szerkezetének megvilágítására törekszik, az *oszthatóság* fogalmán alapszik: egy a egész számról akkor mondjuk, hogy egy b egész számmal osztható, ha létezik oly c egész szám, hogy

$$a = bc.$$

Az, hogy két egész szám egy harmadik számhoz képest oszthatósági szempontból egyformán viselkedik, a két számnak bizonyos szerkezeti rokonságára mutat, a mely rokonságnak továbbmenő megvizsgálásával épen az *oszthatóság* s a vizsgálat magasabb fokán a *kongruencziák* elmélete foglalkozik.

A közönséges egész számok oszthatósági elmélete igen egyszerű és világos tételek segítségével építhető fel, a melyek közül azokat, a melyekre a többi tétel mind visszavezethető, a melyek az egész oszthatósági elmélet tartalmát összefoglalják, az oszthatósági elmélet *alaptételeinek* nevezzük.

Midőn a számelmélet eme legelső problémájáról általánosabb megszámlálható sokaságoknak, *algebrai* számokból képezett tartományoknak tárgyalására térünk át, első törekvésünk az egyszerűbb esetekben elért eredményeknek az általánosabb számkörre való lehetőleg teljes átvitelére irányul: át akarjuk ugyanis ültetni az algebrai számok körébe az *egész szám* s az *oszthatóság* fogalmát úgy, hogy az oszthatóságnak a közönséges egész számok körében fennálló alaptételei, itt ez általánosabb számkörben is érvényben maradjanak. E dolgozat czélja megmutatni, miként történik ez az átültetés az egyik idevágó elméletében, a Dedekind-féle ideálelméletnek Hurwitz-féle átdolgozásában,* a mely az eredeti Dedekind-féle elméletnél sokkal egyszerűbb és áttekinthetőbb.

Hurwitznak mindenekelőtt szüksége van egy segédtételre, a mely az algebrai egész számú együtthatókkal biró egész alakokra vonatkozik s a melyet legelőször Kronecker mondott ki és bizonyított be.** E tételnek óriási hordereje van az algebrai számok s általánosabb alakjában az algebrai függvények elméletében: e tételnek segítségével épithető fel legtökéletesebben a Kronecker-*féle divizorelmélet*, a mely az algebrai egész számok oszthatóságának problémáját Dedekind eljárásától teljesen különböző úton oldja meg.

E tételnek egy egyszerű alakját, a mely a továbbiaknak alapul szolgál s ez alakjának Hurwitz-féle bebizonyítását fogom első sorban ismertetni.

A tétel a következő:

Ha $\mu_0, \mu_1, \ldots, \mu_r$ és $\nu_0, \nu_1, \ldots, \nu_s$ *algebrai egész számok és*

$$\varphi(x) = \mu_0 x^r + \mu_1 x^{r-1} + \cdots + \mu_r$$
$$\psi(x) = \nu_0 x^s + \nu_1 x^{s-1} + \cdots + \nu_s,$$

* Nachrichten von der königl. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen. Mathematisch-Physikalische Klasse, 1894. »Zur Theorie der Ideale«.

** Mittheilungen aus den Sitzungsberichten der königl. preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin, 1883. «Zur Theorie der Formen höherer Stufe». Más bebizonyitás: Dedekind: «Über einen arithmetischen Satz von Gauss» Mittheilungen der deutschen Mathematiker-Vereinigung in Prag, 1892. — Kronecker tétele legáltalánosabb alakjának teljesen elemi bebizonyitását közölte König tanár úr az 1899—1900. tanévi műegyetemi előadásain.

továbbá

$$f(x) = \varphi(x)\psi(x) = \lambda_0 x^{r+s} + \lambda_1 x^{r+s-1} + \cdots + \lambda_{r+s}$$

és $f(x)$ összes együtthatói oszthatók az ω algebrai egész számmal, oszthatók lesznek ω-val az összes

$$\mu_i \nu_j \quad \binom{i=0,1,2,\ldots,r}{j=0,1,2,\ldots,s}$$

számok, azaz a mint mondani szokás *az összes részletszorzatok is.* *A*)

Algebrai egész szám alatt oly számot értünk, a mely egy raczionális egész együtthatókkal biró algebrai egyenletnek tesz eleget, a melyben az ismeretlen legmagasabb hatványának együtthatója 1, s egy α algebrai egész számról akkor mondjuk, hogy egy β algebrai egész számmal osztható, ha létezik oly γ algebrai egész szám, hogy

$$\alpha = \beta\gamma.$$

Föltehetjük természetesen, hogy μ_0 és ν_0 a 0-tól különbözők, máskülönben felirásuk fölösleges lett volna, s kimutatjuk, hogy az *A*) alatti tétele folyománya a következőnek:

Abból, hogy

$$\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_{r+s} \tag{1}$$

oszthatók ω-val, következik, hogy

$$\mu_0\nu_0, \mu_0\nu_1, \ldots, \mu_0\nu_s \tag{2}$$

oszthatók ω-val. *B*)

Ha ugyanis a *B*) alatti tétel helyes, akkor

$$\varphi_1(x) = \varphi(x) - \mu_0 x^r = \mu_1 x^{r-1} + \mu_2 x^{r-2} + \cdots + \mu_r$$

és $$\psi(x) = \nu_0 x^s + \nu_1 x^{s-1} + \cdots + \nu_s$$

$$f_1(x) = \varphi_1(x)\psi(x) = f(x) - \mu_0\nu_0 x^{r+s} - \mu_0\nu_1 x^{r+s-1} - \cdots - \mu_0\nu_s x^r$$

szorzatának összes együtthatói, mivel részint az 1), részint a 2) sorozat tagjai, ω-val oszthatók, tehát a *B*) alatti tétel értelmében, ha $\varphi_1(x)$-ben x legmagasabb hatványának együtthatója μ_{k_1}

$$\mu_t\nu_0, \mu_t\nu_1, \ldots, \mu_t\nu_s$$
$$(t=1, 2, \ldots, k_1)$$

oszthatók lesznek ω-val.

Látható, hogy ugyanezt az eljárást alkalmazva az

$$f_2(x) = (\varphi_1(x) - \mu_{k_1} x^{r-k_1})\,\psi(x) = \varphi_2(x)\,\psi(x)$$
$$f_3(x) = (\varphi_2(x) - \mu_{k_2} x^{r-k_2})\,\psi(x) = \varphi_3(x)\,\psi(x)$$
s í. t.

szorzatokra, végre azt kapjuk, hogy valóban az összes részletszorzatok oszthatók ω-val, az *A*) alatti tétel tehát be lesz bizonyítva, ha a *B*) alatti tétel helyes voltáról meggyőződünk.

Ez pedig megtörténhetik az által, hogy bármely

$$\frac{\xi_i}{\omega}$$

mennyiségre nézve, a hol

$$\xi_i = \mu_0\nu_i$$
$$(i=1, 2, \ldots, s)$$

felállítunk egy oly algebrai egyenletet, a melynek együtthatói algebrai egész számok, a melyben az ismeretlen legmagasabb hatványának együtthatója 1 s a melynek $\frac{\xi_i}{\omega}$ eleget tesz. Ezzel ki lesz mutatva, hogy $\frac{\xi_i}{\omega}$ egész, minthogy, a mint ismeretes, az ily egyenletek gyökei is algebrai egész számok, s így ξ_i osztható ω-val; $\xi_0 = \mu_0\nu_0 = \lambda_0$-nak ω-val való oszthatósága pedig már a feltételből adódik.

A bebizonyításnál felhasználjuk a szimmetrikus függvények elméletét.

Legyenek az

$$f(x) = \varphi(x)\,\psi(x) = 0$$

egyenlet gyökei

$$\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_{r+s} \qquad 3)$$

ezek közül a

$$\frac{\mu_0}{\lambda_0}\,\psi(x) = x^s + \frac{\xi_1}{\lambda_0}x^{s-1} + \frac{\xi_2}{\lambda_0}x^{s-2} + \cdots + \frac{\xi_s}{\lambda_0} = 0$$

egyenlet gyökei legyenek

$$\rho_{i_1}, \rho_{i_2}, \ldots, \rho_{i_s} \qquad 4)$$

a hol $i_1, i_2, \ldots, i_s$ az $1, 2, \ldots, r+s$ elemeknek bizonyos combinátiója; minthogy $\pm\frac{\xi_i}{\lambda_0}$ $(i=1, 2, \ldots, s)$ a 4) alatti ρ-knak elemi szimmetrikus függvénye, a ξ_i-k maguk is szimmetrikus függvényei lesznek ugyane ρ-knak.

Legyen most

$$\xi_i = \xi_i(\rho_{i_1}, \rho_{i_2}, \ldots, \rho_{i_s}), \quad \xi_i' = \xi_i(\rho_{i_1'}, \rho_{i_2'}, \ldots, \rho_{i_s'}), \ldots,$$
$$\xi_i^{(m-1)} = \xi_i(\rho_{i_1^{(m-1)}}, \rho_{i_2^{(m-1)}}, \ldots, \rho_{i_s^{(m-1)}}),$$

a hol

$$i_1, i_2, \ldots, i_s; \quad i_1', i_2', \ldots, i_s'; \quad \ldots; \quad i_1^{(m-1)}, i_2^{(m-1)}, \ldots, i_s^{(m-1)}$$

az $1, 2, \ldots, r+s$ elemeknek összes különböző ismétlés nélküli s-tagú combinácziói, m tehát $=\binom{r+s}{s}$ s képezzük a

$$\Psi(z) = \left(z - \frac{\xi_i}{\lambda_0}\right)\left(z - \frac{\xi_i'}{\lambda_0}\right)\cdots\left(z - \frac{\xi_i^{(m-1)}}{\lambda_0}\right) =$$
$$= z^m - \psi_1 z^{m-1} + \psi_2 z^{m-2} - \cdots + (-1)^m \psi_m = 0 \qquad 5)$$

egyenletet.

$$\psi_j = \frac{\xi_i \xi_i' \ldots \xi_i^{(j-1)}}{\lambda_0^j} + \cdots$$
$$(j=1, 2, \ldots, m)$$

a $\frac{\xi_i}{\lambda_0}, \frac{\xi_i'}{\lambda_0}, \ldots, \frac{\xi_i^{(m-1)}}{\lambda_0}$ mennyiségeknek s így a 3) alatti ρ-knak szimmetrikus egész függvénye, tehát az

$$\frac{1}{\lambda_0} f(x) = 0$$

egyenletnek

$$\frac{\lambda_1}{\lambda_0}, \frac{\lambda_2}{\lambda_0}, \ldots, \frac{\lambda_{r+s}}{\lambda_0} \qquad 6)$$

együtthatói által egész műveletekkel előállítható, még pedig ennek az előállításnak ismeretes szabályai szerint,* minthogy ψ_j, a mint képezési módjából világos, minden egyes ρ-ban j-edfokú, j-edfokú lesz a 6) alatti mennyiségekben is.

---

* L. pl. WEBER, Algebra 2-ik kiadás, I. kötet 167. l.

E szerint

$$\psi_j = \sum_{\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_{r+s} \leq j} C_{j\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{r+s}} \frac{\lambda_1^{\alpha_1}\lambda_2^{\alpha_2}\ldots\lambda_{r+s}^{\alpha_{r+s}}}{\lambda_0^{\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_{r+s}}} \qquad (j=1, 2, \ldots, m)$$

$\frac{\xi_i}{\lambda_0}$ gyöke az 5) alatti egyenletnek, tehát:

$$\left(\frac{\xi_i}{\lambda_0}\right)^m - \psi_1\left(\frac{\xi_i}{\lambda_0}\right)^{m-1} + \cdots + (-1)^m\psi_m = 0.$$

Felszorozva λ^m -mel:

$$\xi_i^m - \chi_1\xi_i^{m-1} + \cdots + (-1)^m\chi_m = 0, \tag{7}$$

a hol

$$\chi_j = \lambda_0^j\psi_j = \Sigma\, C_{j\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{r+s}} \lambda_1^{\alpha_1}\lambda_2^{\alpha_2}\ldots\lambda_{r+s}^{\alpha_{r+s}}\lambda_0^{j-(\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_{r+s})}$$
$$(j=1, 2, \ldots, m)$$

a

$$\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_{r+s}$$

mennyiségeknek j-edfokú homogén egész függvénye s így ω^j-ve osztható; a 7)-et elosztva ω^m-mel látható tehát, hogy az

$$y^m - \frac{\chi_1}{\omega}y^{m-1} + \cdots + (-1)^j\frac{\chi_j}{\omega^j}y^{m-j} + \cdots + (-1)^m\frac{\chi_m}{\omega^m} = 0$$

egyenletben, a melynek $\frac{\xi_i}{\omega}$ eleget tesz, az együtthatók e szerint mind algebrai egész számok, az előrebocsátott tétel bebizonyítása tehát megtörtént.

Legközelebb látni fogjuk, miként épül fel e tétel alapján a DEDEKIND-féle ideálelméletnek HURWITZ-féle újabb alakja.

Zemplén Győző.

AZ OSZTHATÓSÁG ALGEBRAI GÉNUSZTARTOMÁNYOKBAN.

Mielőtt annak tárgyalására áttérnénk, mikép történhetik a legutóbb ismertetett algebrai tétel segitségével az oszthatóság átültetése a raczionális egész számoknál általánosabb számkörökbe, felsoroljuk és jellemezzük a raczionális egész számok összességének amaz alaptulajdonságait, a melyeket ennél az átültetésnél meg akarunk tartani.

A raczionális egész számok összessége, ha az alapműveleteket a közönséges módon definiáljuk, *valódi holoid tartományt* * képez, azaz oly tartományt, a melyben az összeadás, kivonás és szorzás mindig egyértelműen végezhető, az osztás azonban *nem mindig*, az összeadás commutativ és asszociativ, a szorzás kommutativ, asszociativ és disztributiv jellegű.

E tulajdonsága megvan úgy az algebrai számok összességének, mint egy adott a algebrai egész szám összes raczionális együtthatókkal biró raczionális függvényei közt előforduló egész számok összességének, az a szám (a) *génusztartománya* egész számainak.

Bármely holoid tartományba az oszthatóság fogalma azonnal átvihető s a számelmélet további feladata az így átvitt oszthatóság elméletét felépiteni, főképen megvizsgálni, mennyiben maradnak meg e fogalomátvitelnél a legegyszerűbb holoid tartomány, a raczionális egész számok köre oszthatósági elméletének alaptételei.

---

* Az elnevezés KŐNIG tanár úrtól ered; részletes tárgyalása KŐNIG legközelebb megjelenendő »*Az algebrai mennyiségek arithmetikai elmélete*« czimű művében lesz megtalálható.

Az oszthatósági tételek között vannak olyanok, a melyek közvetetlenül az oszthatóság definicziójából folynak, tehát bármely holoid tartományra nézve egyformán érvényesek, s olyanok, a melyek egyes holoid tartományokban fennállanak, másokban nem. A számelméletre nézve igen fontos e tételeknek éles megkülönböztetése, minthogy csak ez utóbbiak világítják meg közelebbről az egyes tartományok speczialis szerkezetét.

Ily jellemző tételei a raczionális egész számok tartományának a következők, a melyeket az oszthatóság alaptételeinek szokás nevezni:

I. *Minden szám nem equivalens osztóinak száma véges.*

Equivalensnek mondjuk a-t b-vel ($a \sim b$), ha oszthatósági szempontból egyformán viselkednek, azaz, ha minden szám, a mely a-val osztható, osztható b-vel is és viszont; a raczionális egész számok körében egy a szám csak önmagával és $-a$-val equivalens, tehát az a tétel is fennáll, hogy *minden szám osztóinak száma véges;* minthogy azonban vannak oly holoid tartományok, a melyekben egy szám végtelen sok más számmal equivalens, az első alaptételnek legfeljebb az I. alatti alakja lesz ezekbe átvihető s azért fogalmaztuk a tételt mindjárt így; különben is az oszthatóság szempontjából csak ez lényeges.

Az I. alatti tételből egy fontos fogalomhoz jutunk, a *felbonthatatlan szám* fogalmához: az I. közvetlen folyománya ugyanis, hogy vannak oly számok, a melyek önmagukkal és 1-gyel equivalens számokon kívül más számmal nem oszthatók, ezeket a számokat *felbonthatatlan* számoknak nevezzük.

A felbonthatatlan szám fogalmával kapcsolatos fogalom a *törzsszám* fogalma.

Ha az ab szorzat csak úgy lehet osztható p-vel, ha vagy a vagy b osztható p-vel, akkor p-t törzsszámnak nevezzük.

Az oszthatóságnak a raczionális egész számokra nézve érvényes második alaptétele a következő:

II. *Minden felbonthatatlan szám törzsszám,* tehát, minthogy a definiczionál fogva minden törzsszám felbonthatatlan, *a törzsszám és felbonthatlan szám fogalma azonos fogalmak.*

Ezek az alaptételek a raczionális egész számokra nézve egyszerűen bizonyíthatók be, az I. azonnal világos, mert ha a osztható b-vel, $a \leqq b$; a második alaptételt általában a legnagyobb közös osztó elméletének felhasználásával szokás bebizonyítani;* ettől függetlenül legelőször GAUSS mutatta ki e tétel helyességét.** A második alaptétel még egy az iméntitől teljesen különböző alakban is fogalmazható:

II* *Egy szám egy- és csak egyféleképen irható, mint felbonthatatlan számok szorzata.****

Hogy II. és II* egy és ugyannak az igazságnak különböző fogalmazásai, kimutatható teljesen függetlenül ama holoid tartomány speciális szerkezetétől, a melyben a vizsgálatok történnek. Ha ugyanis a II. fennáll, akkor a

$$p_1 p_2 \cdots p_r = q_1 q_2 \cdots q_s$$

egyenlőségből, a hol a p-k és q-k felbonthatatlan számok, minthogy a baloldal q_1-gyel osztható következik, hogy pl.

$$q_1 \sim p_1,$$

tehát

$$p_2 p_3 \cdots p_r \sim q_2 q_3 \cdots q_s$$

ebből pedig

$$q_2 \sim p_2 \text{ s i. t.}$$

$$r = s \quad \text{és} \quad q_s \sim p_r.$$

Viszont a II* alatti tételből következik az, hogy egy szorzat felbonthatatlan számmal csak úgy osztható, ha egyik tényezője osztható, mert, ha

a felbonthatatlan tényezőkre bontva $= p_1 p_2 \cdots p_r$
b « « « $= q_1 q_2 \cdots q_s$

és ab osztható a p felbonthatatlan számmal, akkor

* DIRICHLET-DEDEKIND, Vorlesungen über Zahlentheorie 12—13. l., BACHMANN, Elemente der Zahlentheorie 23. l.

** Disquisitiones Arithmeticæ, Sectio II, 12., 13.

*** Equivalens felbontásokat nem tekintünk különbözőknek.

$$ab = pc = p_1 p_2 \ldots p_r q_1 q_2 \ldots q_s,$$

p tehát a II* alapján a p-k vagy a q-k közt előfordul.

Ha tehát valamely holoid tartományra nézve a II. és II* tételek egyikét bebizonyitjuk, ez által be lesz bizonyítva a másik is.

Hogy e két alaptétel jellemző a raczionális egész számok tartományára, az látható abból, hogy vannak oly holoid tartományok, a melyekben e tételek nem állanak fenn. Így pl. kimutatható, hogy *az összes algebrai egész számok alkotta holoid tartományban minden az egységgel nem equivalens számnak végtelen sok nem equivalens osztója van.*

Minden oly algebrai egyenletnek gyökei, a melynek együtthatói algebrai egész számok s a melyben az ismeretlen legmagasabb hatványának együtthatója 1 szintén algebrai egész számok; ha tehát α algebrai egész szám, $\alpha^{\frac{1}{n}}$ szintén egész, ha n közönséges pozitiv egész szám; ha most α nem osztója 1-nek, azaz *nem egység*, akkor különböző gyökei nem equivalensek egymás közt, mert ha pl. $m > n$ (m is közönséges pozitiv egész szám) $\alpha^{\frac{1}{m}}$ nem osztható $\alpha^{\frac{1}{n}}$-nel, mert ha

$$\frac{\alpha^{\frac{1}{m}}}{\alpha^{\frac{1}{n}}} = \frac{1}{\alpha^{\frac{1}{n} - \frac{1}{m}}} = \beta, \qquad 1)$$

a hol β egész, akkor ebből ama, feltételünkkel ellenkező eredményre jutnánk, hogy α osztója 1-nek; 1)-ből ugyanis

$$\frac{1}{\alpha^{m-n}} = \beta^{mn}$$

s így

$$\frac{1}{\alpha} = \beta^{\frac{mn}{m-n}}$$

szintén egész szám volna.

Az I. alaptétel tehát az összes algebrai számok tartományában nem áll fenn, annál kevésbbé a második, hiszen még a felbonthatlan szám fogalma is elvész.

Ettől egészen eltérően viselkedik egy adott algebrai génusztartomány egész számainak összessége; bár az oszthatóság fogalmának közvetlen átültetésénél csak az első alaptétel marad érvényben, mégis sikerült, az algebrai génusztartomány kellő bővítésével oly holoid tartományt szerkeszteni, a melyben mindkét alaptétel fennáll. Ezzel a szorosan vett arithmetika szempontjából az algebrai számok oszthatóságának legáltalánosabb problémája meg volt oldva, minthogy kimutatható, hogy minden oly egyenlet valamely gyökének összes raczionális együtthatókkal biró raczionális függvényei, a melyben az együtthatók *tetszőleges de véges számú* algebrai szám raczionális függvényei, szintén algebrai génusztartományt alkotnak, míg egy *végtelen sok* algebrai szám által meghatározott tartomány számelméleti vizsgálat tárgyát nem képezheti.

Kimutatjuk most, hogy egy algebrai génusztartományon belül az I. alaptétel mindig fennáll.

Legyen $\alpha = \alpha_1$, a génusztartományt meghatározó algebrai szám az

$$f(x) = x^n - a_1 x^{n-1} + \cdots + (-1)^n a_n = 0$$

a raczionális számok körében irreduczibilis egyenletnek gyöke; a többi, vele *konjugált* gyök legyen:

$$\alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_n.$$

Ismeretes, hogy a génusztartomány bármely száma mint α-nak $n-1$-edfokú raczionális együtthatókkal biró egész függvénye irható; ha $\mu(\alpha)$ egy ily szám $\mu(\alpha)$ *norm*ja alatt a következő raczionális számot értjük:

$$Nm(\alpha) = \mu(\alpha_1)\,\mu(\alpha_2)\ldots\mu(\alpha_n).$$

Ha $\mu(\alpha)$ egész szám, egész lesz $Nm\mu(\alpha)$ is, minthogy a konjugált értékek $\mu(\alpha)$-val együtt egészek vagy nem egészek.

Minden szám osztója a saját normjának, ugyanis az

$$(x-\mu(\alpha_1))(x-\mu(\alpha_2))\ldots(x-\mu(\alpha_n)) =$$
$$= x^n - (\mu(\alpha_1)+\mu(\alpha_2)+\cdots+\mu(\alpha_n))x^{n-1}+\cdots+(-1)^n Nm\mu = 0$$

egyenlet ki lesz elégítve, ha $x = \mu(a)$, tehát

$$(-1)^{n-1} Nm\mu = \mu(a)\left(\{\mu(a)\}^{n-1} - S_1\{\mu(a)^{n-2}\} + \cdots + (-1)^{n-1} S_{n-1}\right)$$

a hol $S_1, S_2, \ldots, S_{n-1}$ az a-knak elemi szimmetrikus függvényei, tehát raczionális egész számok, $Nm\mu$ tehát valóban osztható μ-vel.

Ezeknek alapján már bebizonyítható az I. alaptétel.

Ha μ osztható ν-vel:

$$\mu(a_1) = \nu(a_1)\lambda(a_1)$$

és egyszersmind

$$\mu(a_2) = \nu(a_2)\lambda(a_2)$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

$$\mu(a_n) = \nu(a_n)\lambda(a_n),$$

tehát

$$Nm\mu = Nm\nu Nm\lambda$$

s innen

$$|Nm\nu| \leqq |Nm\mu|$$

de ha

$$Nm\nu = \pm Nm\mu,$$

akkor

$$Nm\lambda = \pm 1$$

és λ, mivel $Nm\lambda$-t osztja, egység, tehát $\mu \sim \nu$, ha pedig μ nem equivalens ν-vel $|Nm\mu| > |Nm\nu|$, a nem equivalens osztók normjainak absolut értékei tehát a raczionális egész számoknak fogyó sorozatát alkotják, μ nem equivalens osztóinak száma tehát legfeljebb $Nm\mu$.

Minden algebrai génusztartományban vannak tehát felbonthatatlan számok, áttérhetünk e szerint annak megvizsgálására, fennáll-e a második alaptétel. KUMMER, a körosztási egyenletek gyökeiből származó tartományok vizsgálata közben* jutott először ama fontos eredményre, hogy vannak oly génusztartományok, a melyekben egy és ugyanaz a szám többféleképen bontható felbonthatatlan tényezők szorzatára.

* ERNST EDUARD KUMMER, Zur Theorie der complexen Zahlen, Crelle's Journal Bd. 35, 319—327. Über die Zerlegung der aus Wurzeln der Einheit gebildeten Zahlen in ihre Primfactoren, l. c. 327—368.

Ez egyszerű példa mutatja, hogy a második alaptétel algebrai génusztartományokra nézve általában nem érvenyes:

Legyen pl. a génusztartományt meghatározó irreduczibilis egyenlet

$$x^2 + 5 = 0$$

és

$$\alpha_1 = 5^{\frac{1}{2}} i$$

a hol $i^2 = -1$, a konjugált gyök $\alpha_2 = -5^{\frac{1}{2}} i$ ugyanebbe a génusztartományba tartozik (az $(5^{\frac{1}{2}} i)$ tartomány ú. n. GALOIS-féle tartomány)

$$9 = 3 . 3 = (2 + 5^{\frac{1}{2}} i)(2 - 5^{\frac{1}{2}} i).$$

Kimutatjuk, hogy $3, 2+5^{\frac{1}{2}}i, 2-5^{\frac{1}{2}}i$ felbonthatatlan számok és 3 és $2+5^{\frac{1}{2}}i$ nem equivalensek egymással.

Hivatkozunk néhány tételre az algebrai génusztartományok elméletéből, a melyeket itt felsorolunk:

a) Minden n-edrendű (n-edfokú irreduczibilis algebrai egyenlet által meghatározott) génusztartománynak van ú. n. *n-tagú alaprendszere,* azaz van benne n egész szám, a melynek raczionális egész együtthatókkal biró homogén lineár függvényeként a génusztartomány minden egész száma *egy- és csak egyféleképen* előállítható s a melyeknek e lineár függvényei kimerítik a génusztartomány egész számainak összességét.*

b) Ha a génusztartomány másodfokú s a meghatározó egyenlet $x^2 - d = 0$, a hol d raczionális egész szám akkor, ha

$$d \equiv 1 \quad (\mathrm{mod}\, 4) \text{ az alaprendszer: } 1, \frac{1+\sqrt{d}}{2},$$

ha pedig $d \equiv 2, 3 \;(\mathrm{mod}\, 4)$ « « $1, \sqrt{d}$.**

A föntebbi esetben $d = -5$, az alaprendszer tehát $1, 5^{\frac{1}{2}}i$, az összes egész számok tehát ily alakúak

$$x + y 5^{\frac{1}{2}} i,$$

* E tételnek egyszerű és kevés segédeszközt igénylő bizonyitását l. HILBERT, Die Theorie der algebraischen Zahlkörper, im Jahresberichte der deutschen Mathematiker-Vereinigung, Vierter Band, S. 177.

** DEDEKIND, Supplement XI. zu DIRICHLET's Zahlentheorie 539. l.

a hol x és y raczionális egész számok, az

$$x_1+y_1 5^{\frac{1}{2}}i = x_2+y_2 5^{\frac{1}{2}}i$$

egyenlőségből pedig következik, hogy

$$x_1 = y_1 \qquad x_2 = y_2.$$

Bebizonyitjuk most ezek alapján, hogy:

1. 3 felbonthatatlan; ha ugyanis $x+y5^{\frac{1}{2}}i$ osztója 3-nak, $Nm(x+y5^{\frac{1}{2}}i) = x^2+5y^2$ osztója $Nm3 = 9$-nek, tehát

$$x^2+5y^2 = \pm 9, \ \pm 3, \ \pm 1.$$

Ha $x^2+5y^2=9, 1$, akkor $x+y5^{\frac{1}{2}}i \sim 3, 1$, míg az

$$x^2+5y^2 = -9, \ \pm 3, \ -1$$

egyenleteknek a raczionális egész számok körében nincs megoldásuk, 3-nak tehát csak önmagával és az egységgel equivalens osztói vannak.

Ugyanez elmondható $2 \pm 5^{\frac{1}{2}}i$-ről is, minthogy

$$Nm(2 \pm 5^{\frac{1}{2}}i) = 9.$$

2. 3 nem equivalens $2+5^{\frac{1}{2}}i$-vel, minthogy nem osztható vele; a

$$3 = (2+5^{\frac{1}{2}}i)(x+y^{\frac{1}{2}}i) = 2x-5y+(x+2y)5^{\frac{1}{2}}i$$

egyenlőségből ugyanis, minthogy $1, 5^{\frac{1}{2}}i$ alaprendszer, következik, hogy

$$2x - 5y = 3$$
$$x + 2y = 0$$

ennek a lineár egyenletrendszernek pedig egy és csak egy megoldásrendszere van és ez nem egész számú, mert

$$x = \tfrac{2}{3} \qquad y = -\tfrac{1}{3}.$$

A 9-nek tehát az $(5^{\frac{1}{2}}i)$ génusztartományon belül valóban két lényegesen különböző felbontása lehetséges, az $(5^{\frac{1}{2}}i)$ génusztartományban tehát az oszthatóság második alaptétele nem áll fenn.

*

A mathematika ilyenkor, midőn bizonyos speciális esetekben fennálló törvények érvényességüket általánosabb esetekben elveszítik, kétféleképen járhat el: vagy megelégszik azzal, hogy a tételek érvényességének megszünését konstatálja, vagy az általánosításnak oly módosítására törekszik, hogy a speciális esetben érvényes tételek kivétel nélkül fennálljanak az általánosabb esetekben is. Természetesen csupán ez utóbbi eljárás jelent valódi haladást a tudományban, minthogy igen nagy mértékben hozzájárul a fogalmak mélyítéséhez és tisztázásához, míg az első úgyszólván bezárja a vizsgálatok továbbvitelének útját. Hasonló esettel állunk szemben az egyenletek elméletében is: a racziónális számok körében látjuk, hogy egy egyszer s mindenkorra kizárható szinguláris esettől eltekintve az elsőfokú egyenletnek mindig van megoldása; már másodfokú egyenletekre térve át, látjuk, hogy itt már azok a kivételes esetek, a melyekben megoldás létezik: jogos álláspont volna itt megállapodni s megvizsgálni, mily esetekben van gyök és mily esetekben nincs, de mennyivel háladatosabb dolog a számtartománynak oly *bővítését** eszközölni, hogy kivétel nélkül mindig létezzék gyök, bevezetni a komplex számokat, a mi a mathematika többi disciplináinak is óriási fejlődését vonta maga után.

Egészen analóg bővítést kell ama tartományon eszközölnünk, a melyben vizsgálataink folynak, ha azt akarjuk, hogy az oszthatóságnak alaptételei algebrai génusztartományokban is fennálljanak.

Hogy ez tényleg lehetséges, azt KUMMER mutatta meg legelőször már említett vizsgálatainál: KUMMER az algebrai génusztartományt bizonyos ú. n. *ideális törzstényezők* bevezetésével bővítette, a melyekkel a második alaptétel érvényessége valóban helyreállott. Lényegben ezzel a probléma már meg volt oldva, a megoldás azonban tökéletesnek még nem mondható, minthogy egyrészt a vizsgálatok tényleges keresztülvitele az egyes génusz-

* KRONECKERnél «Association» l. «Grundzüge einer arithmetischen Theorie der algebraischen Grössen» 47—48. és 93—96. lap.

tartományokra nézve már a legegyszerűbb esetekben szinte leküzdhetetlen nehézségekbe ütközik, másrészt mert a Kummer-féle módszer alapján a génusztartományok általános oszthatósági elmélete nem építhető fel.

Sokkal tökéletesebb DEDEKIND* eljárása, a melynek az újabb vizsgálatok alapján való átdolgozását fogom itt ismertetni.

DEDEKIND elméletének alapgondolata a következő:

A génusztartomány egyes számainak oszthatósági viszonyait úgy is vizsgálhatjuk, hogy a génusztartomány minden ω egész számát az összes a génusztartományban előforduló, ω-val osztható egész számok rendszerével helyettesítjük: legyen λ az (a) génusztartománynak egészen tetszőleges egész száma, akkor az ω-val osztható számok összessége a $\lambda\omega$ alakú számokból áll, a hol λ egymásután az (a) összes egész számaival egyenlő lesz; a $\lambda\omega$ alakú számok összességét jelöljük $[\omega]$-val és $[\omega]$ *főideálnak* nevezzük. Világos, hogy ha ω osztható ω'-vel, azaz

$$\omega = \omega'\omega'',$$

akkor *ω bennfoglaltatik az $[\omega']$-ben,* míg ha $[\omega]$ minden száma száma $[\omega']$-nek is, azaz $[\omega]$ bennfoglaltatik $[\omega']$-ben, a mit HILBERT** szerint így jelölünk:

$$[\omega] \equiv 0\,([\omega']),$$

akkor benne lesz az $\omega'\lambda$ alakú számok között maga ω is és ω osztható lesz ω'-vel. Az $[1]$ főideál, maga (a), egész számainak összessége magában foglalja az összes főideálokat.

Minden főideálnak megvan a következő tulajdonsága:

A) *Ha*

$$k_1, k_2, \ldots, k_r$$

a főideál tetszőleges számai s

$$\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r$$

---

* Legelőször közölve: Supplement XI. zu DIRICHLET's Zahlentheorie, I. Auflage 1872.

** Math. Ann. **44**. kötet, 2. l.

az (α) *tetszőleges számai, akkor*

$$\lambda_1 k_1 + \lambda_2 k_2 + \cdots + \lambda_r k_r$$

szintén száma a főideálnak.

Ennek alapján történik DEDEKIND szerint a tartomány bővitése: miután a génusztartomány minden számát a megfelelő *főiedál*lal helyettesitjük, a tartományt úgy bővitjük, hogy az *összes az* (α) *egész számaiból képezhető oly rendszerekből álljon, a melyeknek megvan az A) alatti tulajdonságuk.*

A bővitett tartomány elemeit *ideál*oknak nevezzük s két ideált akkor mondunk egyenlőnek, ha mindegyikük tartalmazza a másiknak összes számait.

Be fogjuk bizonyitani, hogy az ideálok oszthatósága definiálható úgy, hogy

a) az ideálok oszthatósága a génusztartomány egész számai oszthatóságának czélszerű általánositása legyen,

b) az oszthatóság alaptételei fennálljanak.

Mielőtt erre áttérnénk, még az ideál arithmetikai definiczióját kell megadnunk, minthogy a föntebbiek szerint az egyetlen számból álló 0 ideál kivételével az ideálokat mint végtelen sok számból álló rendszereket definiáltuk, arithmetikailag definiálva pedig csak akkor lesznek, ha véges számú adat segitségével határozhatók meg. Ez megtörténik az által, hogy kimutatjuk a következő tételt:

Egy n-edrendű génusztartomány minden ideáljában van n szám, a melyeknek raczionális együtthatókkal biró homogén lineár függvényeiként az ideál összes számai előállíthatók. Ez az n szám az ideálnak ú. n. *bázisa.*

Legyen az (α)-nak egy n-tagú alaprendszere

$$\omega_1, \omega_2, \ldots \omega_n,$$

akkor egy $\mathfrak{i}$* ideálnak egy tetszőleges száma így írható:

* Az ideálok jelölésére DEDEKIND-et követve a német kis betűket használom.

$$\iota = l_1\omega_1 + l_2\omega_2 + \cdots + l_n\omega_n \qquad 2)$$

a hol az l-ek raczionális egész számok; rendezzük az i összes számait következőképen:

$$\iota_1 = I_1\omega_1 \quad \iota_2 = I_{12}\omega_1 + I_2\omega_2 \ldots \iota_n = I_{1n}\omega_1 + I_{2n}\omega_2 + \cdots + I_{n-1n}\omega_{n-1} + I_n\omega_n$$
$$\iota_1' = I_1'\omega_1 \quad \iota_2' = I_{12}'\omega_1 + I_2'\omega_2 \ldots \iota_n' = I_{1n}'\omega_1 + I_{2n}'\omega_2 + \cdots + I_{n-1n}'\omega_{n-1} + I_n'\omega_n$$

. . . .

a k-adik oszlopban állanak az összesek, a melyeknél ω_k együtthatója nem 0, míg $\omega_{k+1}, \omega_{k+2}, \ldots, \omega_n$ együtthatója 0 ($k = 1, 2, \ldots, n$) és

$$|I_k| \leqq |I_k'|, \quad |I_k''|, \ldots$$

I_k akkor osztója bármely $I_k^{(i)}$-nek, mert ha I_k és $I_k^{(i)}$ legnagyobb közös osztója nem I_k, akkor e legnagyobb közös osztó abszolut értéke kisebb $|I_k|$-nál, pl. I_k^0; de akkor

$$sI_k + s^{(i)}I_k^{(i)} = I_k^0$$

a hol az s-ek raczionális egész számok, és

$$s\iota_k + s^{(i)}\iota_k^{(i)}$$

szám is az i-nek a k-adik oszlopba tartozó oly ideálja volna, a melynél

$$I_k^0 < |I_k|$$

a mi az I_k-ra vonatkozó feltételünkkel ellenmond, I_k tehát osztója $I_k', I_k'', \ldots$-nak s így I_n osztója l_n-nek is (l. 2) képlet), ha tehát $l_n = I_n a_n$, a hol a_n raczionális egész szám,

$$\iota^{(n)} = \iota - a_n\iota_n = I_{1n}^*\omega_1 + I_{2n}^*\omega_2 + \cdots + I_{n-1n}^*\omega_{n-1} \qquad n^*)$$

az $n-1$-edik oszlopba tartozik s így

$$I_{n-1n}^* = I_{n-1}a_{n-1}$$
$$\iota^{(n-1)} = \iota^{(n)} - a_{n-1}\iota_{n-1} = I_{1n-1}^*\omega_1 + I_{2n-1}^*\omega_2 + \cdots + I_{n-2n-1}^*\omega_{n-2} \qquad n-1^*)$$

s i. t.

$$\iota^{(2)} = \iota^{(3)} - a_2\iota_2 = I_{12}^*\omega_1 \qquad 2^*)$$
$$\iota^{(1)} = \iota^{(2)} - a_1\iota_1 = 0. \qquad 1^*)$$

Összeadva az n^*), $n-1^*$), ..., 2^*), 1^*) képleteket, azt kapjuk, hogy

$$\iota = a_1\iota_1 + a_2\iota_2 + \cdots + a_n\iota_n$$

$$\iota_1, \iota_2, \ldots, \iota_n,$$

tehát az $\mathfrak{i}$ ideál bázisát képezik.*

Ez által kimutattuk, hogy egy génusztartomány összes ideáljai véges számú elemek által határozhatók meg, úgy, hogy tárgyalásaink általánossága nem lesz megszorítva, ha csupán oly ideálokat vizsgálunk, a melyek véges számú algebrai egész szám oly homogén lineár függvényeinek összességéből állanak, a melyeknek együtthatói a génusztartomány tetszőleges egész számai; ha az ideált ily módon meghatározó algebrai egész számok

$$\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_r,$$

akkor a megfelelő ideált így jelöljük:

$$\mathfrak{m} = [\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_r]$$

a mi a főideálok számára bevezetett jelölésnek czélszerű általánosítása.

Ezek után áttérhetünk az oszthatóságnak az ideálok tartományába való átültetésére.

Definiáljuk előbb az ideálok szorzását:

Ha

$$\mathfrak{m} = [\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_r] \quad \text{és} \quad \mathfrak{n} = [\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_s],$$

akkor az $\mathfrak{mn}$ szorzat alatt a következő ideált értjük:

$$\mathfrak{mn} = [\mu_1\nu_1, \mu_1\nu_2, \ldots, \mu_1\nu_s, \mu_2\nu_1, \mu_2\nu_2, \ldots, \mu_2\nu_s, \ldots, \mu_r\nu_1, \mu_r\nu_2, \ldots, \mu_r\nu_s]$$

az oszthatóságnak oly definicziója pedig, a mely az *a)* és *b)* követelményeknek megfelel, a következő:

$\mathfrak{m}$ *osztható* $\mathfrak{n}$-*nel, ha van oly* $\mathfrak{n}_1$, *hogy*

$$\mathfrak{m} = \mathfrak{nn}_1.$$

* Az ideálelmélet ez alapvető tételének ez az egyszerű bebizonyítása HILBERTtől származik: Theorie der algebraischen Zahlkörper, 182. l.

Kimutatjuk először is, hogy e definiczió valóban megfelel az *a)* követelménynek, ha ugyanis $[\mu]$ osztható $[\nu]$-vel, akkor a μ szám is osztható a ν számmal az (α) génusztartományban és megfordítva, ha μ osztható ν-vel, $[\mu]$ is osztható $[\nu]$-vel:

Az állítás első része azonnal világos, mert, ha $[\mu]$ osztható $[\nu]$-vel.

$$[\mu] = [\nu][\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_s]$$

s akkor a szorzás definicziója értelmében $[\mu]$ minden száma tehát maga μ is ily alakú

$$\lambda_1\nu\nu_1 + \lambda_2\nu\nu_2 + \cdots + \lambda_s\nu\nu_s,$$

a hol a λ-k (α) algebrai egész számai, tehát μ osztható ν-vel. Viszont ha μ osztható ν-vel $\mu = \nu\lambda$ és

$$[\mu] \equiv 0([\nu]),$$

de akkor, ha $[\mu]$ bázisa $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n$,

$$[\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n] = [\nu\mu_1', \nu\mu_2', \ldots, \nu\mu_n'] = [\nu][\mu_1', \mu_2', \ldots, \mu_n'].$$

Ebből látható az is, ha egy főideál egy másik főideálban benntoglaltatik, akkor osztható vele és megfordítva. A megfelelő tétel tetszőleges ideálokra nézve equivalens az oszthatóság alaptételeivel, s ennek közvetlen bebizonyítására törekszik Dedekind s ebből vezeti le az oszthatóság alaptételeit.[1] E tétel bizonyításánál van szükség az igen nehézkes és elvont modulelméletre is, a melynek fölépítése többször idézett munkájának negyedik kiadásában nagy mértékben tökéletesített alakban is még 38 lapot vesz igénybe.[2] Hilbert és Hurwitz az egész elméletet nagy mértékben egyszerűsítették, még pedig az által, hogy nem a Dedekind-féle főtétel, hanem egy másik, vele equivalens tételt állítottak az elmélet élére, a melynek bebizonyítására különösen algebrai segédeszközökkel,[3] de más úton[4] is igen egyszerűen történhetik meg.

---

[1] L. Supplement XI zu Dirichlet's Zahlentheorie 553., 554. lap lábjegyzék.

[2] Hilbert, Math. Ann. 44. k., Hurwitz, Göttinger Nachr. 1894. 294. l.

[3] Hurwitz, Göttinger Nachrichten 1895. 327. l.

[4] 493—531. l. c.

E tételre azonban az oszthatóság I. alaptételének bebizonyításánál még nincs szükségünk, az megtörténhetik már az eddigiek alapján, tehát közvetlenül az ideál definicziója segítségével.

Ugyanazt a jelölést használva, a melyet főideáloknál használtunk, belátható, hogy ha egy $\mathfrak{m}$ ideál osztható egy $\mathfrak{n}$ ideállal, akkor

$$\mathfrak{m} \equiv 0\,(\mathfrak{n}),$$

azaz $\mathfrak{m}$ minden száma száma $\mathfrak{n}$-nek is; ha ugyanis

$$\mathfrak{m} = [\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_r] \quad \text{és} \quad \mathfrak{n} = [\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_s],$$

továbbá

$$\mathfrak{m} = \mathfrak{n}\mathfrak{n}' = \mathfrak{n}[\nu_1', \nu_2', \ldots, \nu_{s'}'] = [\nu_1\nu_1', \nu_1\nu_2', \ldots, \nu_s\nu_{s'}'],$$

tehát $\mathfrak{m}$-nek egy tetszőleges μ száma ily alakú:

$$\begin{aligned}\mu = \lambda_{11}\nu_1\nu_1' + \lambda_{12}\nu_1\nu_2' + \cdots + \lambda_{1s'}\nu_1\nu_{s'}' + \\ + \lambda_{21}\nu_2\nu_1' + \lambda_{22}\nu_2\nu_2' + \cdots + \lambda_{2s'}\nu_2\nu_{s'}' + \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ + \lambda_{s1}\nu_s\nu_1' + \lambda_{s2}\nu_s\nu_2' + \cdots + \lambda_{ss'}\nu_s\nu_s',\end{aligned}$$

a hol a λ-k az (α) tartomány egész számai; $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_r$ szerint rendezve azt kapjuk, hogy

$$\mu = \tau_1\nu_1 + \tau_2\nu_2 + \cdots + \tau_s\nu_s,$$

a hol a τ-k szintén (α)-beli egész számok, $\mathfrak{m}$-nek bármely μ száma tehát valóban száma $\mathfrak{n}$-nek is. Hogy tehát az első alaptételt bebizonyítsuk, elég kimutatni azt, hogy *egy adott ideált csak véges számú más ideál foglalhat magában*, ebből már következik, hogy *egy adott ideál csak véges számú ideállal lehet osztható.*

Legyen μ az $\mathfrak{m}$ ideálnak egy tetszőleges száma és legyen

$$\mathfrak{m} \equiv 0\,(\mathfrak{n}),$$

akkor $\mathfrak{n}$-ben benn lesz μ és így minden μ-vel osztható szám, tehát a $|Nm\mu| = m$ raczionális egész szám is; ha $\mathfrak{n}$ bázisa

$$\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_n$$

világos, hogy:

$$\mathfrak{n} = [\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_n] = [\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_n, m], \qquad 3)$$

továbbá

$$\mathfrak{n} = [\nu_1 - \lambda_1 m, \nu_2 - \lambda_2 m, \ldots, \nu_n - \lambda_n m, m], \tag{4}$$

a hol a λ-k (α) egész számái; ugyanis 3) szerint $\mathfrak{n}$ tetszőleges ν száma így írható:

$$\nu = \rho_1\nu_1 + \rho_2\nu_2 + \cdots + \rho_n\nu_n + \rho m = \rho_1(\nu_1 - \lambda_1 m) +$$
$$+ \rho_2(\nu_2 - \lambda_2 m) + \cdots + \rho_n(\nu_n - \lambda_n m) + (\rho + \lambda_1\rho_1 + \cdots + \lambda_n\rho_n)m,$$

tehát a 3) alatti ideál minden száma, száma a 4) alattinak is, és megfordítva, mivel

$$\nu' = \sigma_1(\nu_1 - \lambda_1 m) + \sigma_2(\nu_2 - \lambda_2 m) + \cdots + \sigma_n(\nu_n - \lambda_n m) + \sigma m =$$
$$= \sigma_1\nu_1 + \sigma_2\nu_2 + \cdots + \sigma_n\nu_n + (\sigma - \lambda_1\sigma_1 - \lambda_2\sigma_2 - \cdots - \lambda_n\sigma_n)m$$

a 4) alatti ideál minden száma benn van a 3) alatti ideálban is.

Legyen (α)-nak n-tagú alaprendszere

$$\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$$

és

$$\nu_j = n_{j1}\omega_1 + n_{j2}\omega_2 + \cdots + n_{jn}\omega_n, \quad (j=1, 2, \ldots, n)$$

a hol az n-nek raczionális egész számok, és legyen

$$n_{jk} = mq_{jk} + n'_{jk}$$

úgy, hogy n'_{jk} n_{jk}-nak legkisebb pozitiv maradéka mod m, tehát

$$0 \leqq n'_{jk} < m. \quad (j, k=1, 2, \ldots, n) \tag{5}$$

Válaszszuk a 4)-ben a λ-kat következőképen:

$$\lambda_j = q_{j1}\omega_1 + q_{j2}\omega_2 + \cdots + q_{jn}\omega_n, \quad (j=1, 2, \ldots, n)$$

akkor

$$\begin{aligned}\mathfrak{n} = [&n'_{11}\omega_1 + n'_{12}\omega_2 + \cdots + n'_{1n}\omega_n,\\ &n'_{21}\omega_1 + n'_{22}\omega_2 + \cdots + n'_{2n}\omega_n,\\ &\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\\ &n'_{n1}\omega_1 + n'_{n2}\omega_2 + \cdots + n'_{nn}\omega_n, m].\end{aligned}$$

Mindamaz ideálok, a melyek $\mathfrak{m}$-et magukban foglalják, ebben a *kanonikus* alakban írhatók; az ily alakú ideálok azonban az

5) alatti megszorító feltételek következtében csak véges számmal vannak, véges számmal lesznek tehát azok az ideálok, a melyek $\mathfrak{m}$-et magukban foglalják, véges számmal lesznek végre az $\mathfrak{m}$ tetszőleges ideál osztói is.

Világos, hogy minden ideál bennfoglaltatik önmagában s az (α) génusztartomány egész számainak összességében, az [1] főideálban az ú. n. *egységideálban.*

Közvetlen folyománya az első alaptételnek, hogy vannak oly ideálok, a melyeket önmagukon s az egységideálon kívül más ideál nem foglal magában; ezeket az ideálokat *felbonthatatlan* ideáloknak nevezzük. A felbonthatatlan ideál fogalma a vizsgálatnak e fokán még nem tökéletes általánosítása a felbonthatatlan szám fogalmának, minthogy még nem tudjuk, nincsenek-e oly ideálok, a melyek, bár az egységtől s önmaguktól különböző osztójuk nincs, mégis egy önmaguktól s az egységtől különböző ideálban bennfoglaltatnak; csak akkor lesznek a felbonthatatlan szám és ideál fogalmai megfelelő fogalmakká, ha az oszthatóság és bennfoglaltatás azonosságát ki fogjuk mutatni, a mely tétel a második alaptétellel együtt be lesz bizonyítva, ha kimutatjuk az ideálelméletnek következő *főtételét:*

B) *Minden* $\mathfrak{m}$ *ideálhoz találhatunk egy* $\mathfrak{m}_1$ *ideált úgy, hogy* $\mathfrak{m}\mathfrak{m}_1$ *főideál legyen.*

Ez a tétel Hurwitznak előbb ismertetett segédtételével egy csapásra bebizonyítható; mielőtt erre rátérnénk megmutatjuk, hogy úgy az oszthatóság és a bennfoglaltatás azonos volta, mint a második alaptétel ennek a tételnek folyományai.

A következő egyszerű segédtételt bocsátjuk előre:

C) *Abból, hogy*

$$[\mu]\mathfrak{i} = [\mu]\mathfrak{n} \qquad 6)$$

következik, hogy

$$\mathfrak{i} = \mathfrak{n}.$$

Ha

$$\mathfrak{i} = [\iota_1, \iota_2, \ldots, \iota_r] \quad \text{és} \quad \mathfrak{n} = [\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_s].$$

Ha ι $\mathfrak{i}$-nek tetszőleges száma a 6) alapján

$$\mu\iota = \mu(\lambda_1\nu_1 + \lambda_2\nu_2 + \cdots + \lambda_s\nu_s)$$

s innen

$$\iota = \lambda_1 \nu_1 + \lambda_2 \nu_2 + \cdots + \lambda_s \nu_s,$$

azaz ι $\mathfrak{n}$ száma; ugyanígy következik, hogy $\mathfrak{n}$-nek egy tetszőleges ν száma $\mathfrak{i}$-ben is benn van, s valóban

$$\mathfrak{i} = \mathfrak{n}.$$

A *B)* alatti főtételből most már következik, hogy az oszthatóság és bennfoglaltatás fogalmai azonos fogalmak, ugyanis, *ha*

$$\mathfrak{m} \equiv 0\,(\mathfrak{n}), \tag{7}$$

akkor $\mathfrak{m}$ *osztható* $\mathfrak{n}$-*nel*; (a tételnek közvetlenűl világos megfordítását már bebizonyítottuk). *C)*

Legyen $\mathfrak{n}\mathfrak{n}_1$ főideál, akkor, mivel a 7)-ből következik, hogy

$$\mathfrak{m}\mathfrak{n}_1 \equiv 0\,(\mathfrak{n}\mathfrak{n}_1)^*$$

azt kapjuk, hogy

$$\mathfrak{m}\mathfrak{n}_1 = (\mathfrak{n}\mathfrak{n}_1)\,\mathfrak{k}.$$

Ha ugyanis

$$\mathfrak{m}\mathfrak{n}_1 = [k_1, k_2, \ldots, k_r] = [\eta k_1', \eta k_2', \ldots, \eta k_r'],$$

a hol

$$[\eta] = \mathfrak{n}\mathfrak{n}_1,$$

akkor

$$\mathfrak{m}\mathfrak{n}_1 = [\eta]\,[k_1', k_2', \ldots, k_r'] = [\eta]\,\mathfrak{k}$$

szorozzunk végig $\mathfrak{n}$-nel:

$$\mathfrak{m}\,[\eta] = \mathfrak{n}\mathfrak{k}\,[\eta]$$

és

$$\mathfrak{m} = \mathfrak{n}\mathfrak{k}.$$

Az oszthatóság tehát valóban azonos a bennfoglaltatással s a felbonthatatlan ideál fogalma a felbonthatatlan szám fogalmának teljesen megfelelő általánositása.

Ezeknek segitségévsl most már kimutatható az oszthatóság második alaptétele, a mely következőképen hangzik:

Az $\mathfrak{m}\mathfrak{m}'$ *szorzatideál csak úgy lehet osztható a* $\mathfrak{p}$ *felbonthatat-*

---

* E következtetés jogosultsága az ideálok szorzásának definicziójából azonnal világos.

lan ideállal, ha vagy $\mathfrak{m}$ vagy $\mathfrak{m}'$ osztható $\mathfrak{p}$-vel, azaz *a felbonthatatlan ideál «törzsideál».*

Kimutatjuk, hogy ha $\mathfrak{m}$ nem osztható $\mathfrak{p}$-vel, akkor $\mathfrak{m}'$ osztható $\mathfrak{p}$-vel.

Legyen μ $\mathfrak{m}$-nek egy száma, a mely $\mathfrak{p}$-ben nem fordul elő; ily szám föltétlenül létezik, mert ha $\mathfrak{m}$ nem osztható $\mathfrak{p}$-vel $\mathfrak{m}$ nem is foglaltatik $\mathfrak{p}$-ben a *C)* alatti tétel alapján; ha

$$\mathfrak{p} = [\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_r],$$

akkor

$$\mathfrak{k} = [\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_r, \mu] = [1],$$

mert magában foglalja a felbonthatatlan $\mathfrak{p}$-t, azonban nem azonos vele, minthogy μ $\mathfrak{p}$-ben nem fordul elő; tehát vannak az (α)-nak oly λ egész számai, hogy

$$1 = \lambda\mu + \lambda_1\pi_1 + \lambda_2\pi_2 + \cdots + \lambda_r\pi_r. \tag{8)}$$

Legyen most μ' $\mathfrak{m}'$-nek egy tetszőleges száma, feltételünk szerint

$$\mathfrak{m}\mathfrak{m}' = \mathfrak{p}\mathfrak{m}'',$$

tehát

$$\mathfrak{m}\mathfrak{m}' \equiv 0\,(\mathfrak{p})$$

és

$$\mu\mu' = \tau_1\pi_1 + \tau_2\pi_2 + \cdots + \tau_r\pi_r,$$

a hol a τ-k az (α) egész számai; szorozva λ-val:

$$\lambda\mu\mu' = \tau_1'\pi_1 + \tau_2'\pi_2 + \cdots + \tau_r'\pi_r$$

a 8)-ból tehát:

$$\mu'(1 - \lambda_1\pi_1 - \lambda_2\pi_2 - \cdots - \lambda_n\pi_n) =$$
$$= \mu' - \mu'\lambda_1\pi_1 - \mu'\lambda_2\pi_2 - \cdots - \mu'\lambda_n\pi_n = \tau'\pi_1 - \tau'\pi_2 - \cdots - \tau'\pi_n$$

s így

$$\mu' = \lambda_1'\pi_1 + \lambda_2'\pi_2 + \cdots + \lambda_n'\pi_n,$$

a hol a λ-k az (α) egész számai s valóban

$$\mathfrak{m}' \equiv 0\,(\mathfrak{p})$$

és $\mathfrak{m}'$ osztható $\mathfrak{p}$-vel.

A mint már előbb láttuk,* tekintettel arra, hogy a felbont-

* L. 3. l.

hatatlan ideál fogalma a felbonthatatlan szám fogalmának valódi általánosítása és mivel a *B)* tétel alapján az $\mathfrak{mi} = \mathfrak{mn}$ egyenlőség az $\mathfrak{i} = \mathfrak{n}$ egyenlőséget is maga után vonja, ebből az is következik, hogy egy ideál egy és csak egyféleképen bontható felbonthatatlan ideálok szorzatára.

Látható, hogy minden a *B)* alatti főtételen fordul meg, a mely azonban KRONECKER ismertetett segédtétele alapján igen egyszerűen bizonyítható be.

Legyen

$$\mathfrak{m} = [\mu_0, \mu_1, \ldots, \mu_r]$$

és

$$\varphi(x) = \mu_0 x^r + \mu_1 x^{r-1} + \cdots + \mu_r$$

$\psi(x)$ pedig

$$\prod_{i-2}^{n} \{\mu_0(a_i) x^r + \mu_1(a_i) x^{r-1} + \cdots + \mu_r(a_i)\} = \nu_0 x^s + \nu_1 x^{s-1} + \cdots + \nu_s,$$

a hol mint eddig mindig

$$a = a_1, a_2, \ldots, a_n$$

az (a)-t meghatározó egyenlet gyökei; e szerint

$$\varphi(x)\psi(x) = Nm\varphi(x) = c_0 x^{r+s} + c_1 x^{r+s-1} + \cdots + c_{r+s},$$

a hol a c-k raczionális egész számok, minthogy az a-knak szimmetrikus egész függvényei.

Kimutatjuk mindenekelőtt, hogy a ν-k az (a) számai; ugyanis a

$$\Phi(z) = (z - \varphi_1(x))(z - \varphi_2(x)) \ldots (z - \varphi_n(x)) = 0$$

egyenlet, a hol

$$\varphi_i(x) = \mu_0(a_i) x^r + \mu_1(a_i) x^{r-1} + \cdots + \mu_r(a_i)$$

ki van elégítve, ha $z = \varphi(x)$; tehát

$$\Phi(\varphi(x)) = (\varphi(x))^n - G_1(x)(\varphi(x))^{n-1} +$$
$$+ G_2(x)(\varphi(x))^{n-2} - \cdots + (-1)^n G_n(x) = 0,$$

a hol a G-k x-nek raczionális egész együtthatókkal biró egész függvényei és $G_n(x) = Nm\varphi(x)$; innen

$$\psi(x) = \frac{Nm\,\varphi(x)}{\varphi(x)} =$$
$$= (-1)^{n-1}\left\{(\varphi(x))^{n-1} - G_1(x)(\varphi(x))^{n-2} + \cdots + (-1)^{n-1}G_{n-1}(x)\right\}$$

a ν-k tehát valóban (α) számai és a *B)* alatti tétel is helyes, mert:

$$[\mu_0, \mu_1, \ldots, \mu_r][\nu_0, \nu_1, \ldots, \nu_s] = [c],$$

a hol c $Nm\varphi(x)$ együtthatóinak legnagyobb közös osztója (a c-k raczionális egész számok); a baloldalon álló ideálnak egy tetsző-leges száma ugyanis

$$\lambda_{00}\mu_0\nu_0 + \lambda_{01}\mu_0\nu_1 + \cdots + \lambda_{rs}\mu_r\nu_s.$$

Kronecker tétele értelmében osztható c-vel, tehát benne van $[c]$-ben, viszont

$$c = l_0c_0 + l_1c_1 + \cdots + l_{r+s}c_{r+s},$$

a hol az l-ek raczionális egész számok és

$$c_j = \sum_{i_j + k_j = j} \mu_{ij}\,\nu_{kj}$$
$$\begin{pmatrix} i_j = 0, 1, 2, \ldots, r \\ k_j = 0, 1, 2, \ldots, s \end{pmatrix}$$

maga c tehát a $[\mu_0, \mu_1, \ldots, \mu_r][\nu_0, \nu_1, \ldots, \nu_s]$ ideál száma.

Látható tehát, hogy az ideálok szerkezetének rövid tanulmányozása s az előrebocsátott algebrai tétel elégségesek voltak arra, hogy az oszthatóság alaptételeinek az ideálok körében való érvényességét könnyű szerrel bebizonyítsuk s arra a kevéssé áttekinthető tételhalmazra, melyet Dedekind az alaptételek kimutatásánál felhasznál, szükségünk nincs.

Zemplén Győző.

A MAGASABBFOKÚ KONGRUENCZIÁK ELMÉLETÉHEZ.

E közleményben néhány tételt adok a magasabbfokú kongruencziákról, alkalmazásokkal együtt.

I.

1. Legyen

$$f(x)=x^n+A_1x^{n-1}+\cdots+A_n=0$$

a hol A_i raczionális egész számot jelent, oly irreduczibilis egyenlet, melynek ω egyik gyöke. Legyen továbbá

$$(1, \omega, \omega^2, \ldots, \omega^{n-1})$$

az ω által meghatározott Ω számtestnek alaprendszere. Akkor a következő tétel érvényes.

I. *Ha p tetszőleges törzsszám, akkor az*

$$f(x)\,(\mathrm{mod.}\,p^a),\ a>1$$

kifejezés egyértelműleg bontható oly raczionális egész együtthatójú irreduczibilis tényezők szorzatára, a melyekben a legmagasabb együttható az egység. És pedig, ha $a=1$ esetében

$$f(x)\equiv\prod_{i=1}^{s} f_i(x)^{e_i}\,(\mathrm{mod.}\,p),$$

a hol $f_i(x)\,(\mathrm{mod.}\,p)$ különböző irreduczibilis kifejezéseket jelent, akkor általában:

$$f(x)\equiv\prod_{i=1}^{s} F_i(x)\,(\mathrm{mod.}\,p^a),$$

a hol a $F_i(x)(\mathrm{mod.}\,p^a)$ irreduczibilis kifejezések a

$$F_i(x)\equiv f_i(x)^{e_i}\,(\mathrm{mod.}\,p)$$

feltételnek tesznek eleget.

2. Legyen először

$$f(x) \equiv \prod_{i=1}^{s} f_i(x)^{e_i} \pmod{p} \tag{1}$$

és

$$e_1 = e_2 = \cdots = e_s = 1. \tag{1*}$$

Mivel (mod. p) az irreduczibilis tényezőkre való felbontások egyértelműek és mivel másrészt SCHÖNEMANN vizsgálatai szerint a (mod. p^α) irreduczibilis kifejezések egyszersmind (mod. p) irreduczibilis kifejezések hatványai;* azért $f(x)$ (mod. p^α) felbontásai csak a következő alakúak lehetnek:

$$f(x) \equiv \prod_{i=1}^{s} F_i(x) \pmod{p^\alpha},$$

a hol $F_i(x)$ (mod. p^α) irreduczibilis és

$$F_i(x) \equiv f_i(x) \pmod{p}.$$

3. Legyen most pl.

$$e_1 > 1.$$

Akkor az előbb említettek alapján találunk oly

$$a_1, a_2, \ldots, a_k$$

pozitiv egész számokat, a melyekre nézve:

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_k = e_1$$

$$\left.\begin{array}{l} f_1(x)^{a_1} \equiv \Phi_1(x) \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ f_1(x)^{a_k} \equiv \Phi_k(x) \end{array}\right\} \pmod{p}$$

a hol

$$\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_k$$

az $f(x)$ (mod. p^α) valamely felbontásában szereplő irreduczibilis kifejezések. Be fogjuk bizonyitani, hogy $k=1$, a mi azáltal fog megtörténni, hogy kimutatjuk a

$$k > 1$$

* Crelle 32. Von denjenigen Moduln, welche Potenzen von Primzahlen sind §. 60.

lehetetlenségét. Ugyanis

$$f(x) \equiv \prod_{t=1}^{k} \big(f_1(x)^{a_t} + p\Psi_t(x)\big)\, g(x) \,(\mathrm{mod.}\, p^{\alpha}),\ \alpha > 1$$

és így $k>1$-ből következnék

$$f(x) \equiv f_1(x)\, G(x) \,(\mathrm{mod.}\, p^2). \tag{2}$$

Ha továbbá teszszük

$$f(x) = \prod_{i=1}^{s} f_i(x)^{e_i} - pM(x),$$

akkor (1) és (2)-ből adódik

$$pM(x) \equiv 0 \big(\mathrm{modd.}\, p^2,\ f_1(x)\big)$$

vagyis

$$M(x) \equiv 0 \big(\mathrm{modd.}\, p,\ f_1(x)\big). \tag{3}$$

Ez azonban helytelen, mert Dedekind vizsgálatai szerint*

$$M(x) \not\equiv 0 \,(\mathrm{modd.}\, p,\ f_1(x)).$$

4. Most már bebizonyíthatjuk a felbontás egyértelműségét. Ha ugyanis

$$f(x) \equiv \prod_{i=1}^{s} f_i(x)^{e_i} \,(\mathrm{mod.}\, p)$$

és

$$f(x) \equiv \prod_{i=1}^{v_1} F_i(x) \equiv \prod_{i=1}^{v_2} \overline{F_i}(x) \,(\mathrm{mod.}\, p^{\alpha}),$$

akkor az előzők szerint

$$v_1 = v_2 = s,\quad F_i(x) \equiv \overline{F_i}(x) \equiv f_i(x)^{e_i} \,(\mathrm{mod.}\ p).$$

Azonban az $F_i(x)$, valamint az $\overline{F_i}(x)$ kifejezések egymás között (mod. p) relativ primek és így**

$$F_i(x) \equiv \overline{F_i}(x) \,(\mathrm{mod.}\, p^{\alpha}).$$

---

* Über den Zusammenhang zwischen d. Theorie d. Ideale und d. höheren Congruenzen p. 17.

** Von denjenigen Moduln etc. §. 58.

5. A most bebizonyított tétel egy corollariuma a következő.

Corollarium. Arra nézve, hogy az

$$f(x)=0$$

egyenlet minden törzsszámhatványra reduczibilis legyen, szükséges és elegendő, hogy az Ω számtestben minden raczionális törzsszám legalább is két primideállal legyen osztható.

Legyen az n-edik primitiv egységgyökök egyenlete

$$P_n(x)=0. \tag{4}$$

Erre az előbbi fejtegetések alkalmazhatók és így előállíthatók a

$$P_n(x)\,(\mathrm{mod.}\,p^\alpha)$$

felbontások mivel $\alpha=1$ esetére a felbontás már KUMMER óta ismeretes. A (4) egyenlet minden törzsszámhatványra reduczibilis, ha n-nek nincs oly p törzstényezője, a melyre nézve

$$n=p^\pi m,\ (p,m)=1$$

és p primitiv gyök volna (mod. m). Megjegyzendő, hogy e szabály alkalmazásánál $m=1$ is modulusnak veendő, a melyre minden szám primitiv gyök.

II.

1. Oly irreduczibilis egyenletre, a mely minden törzsszámhatványra reduczibilis, legelőször HILBERT utalt, kimutatván a

$$t^4+13t^2+81=$$
$$=\left(t+\frac{\sqrt{5}+\sqrt{-31}}{2}\right)\left(t+\frac{-\sqrt{5}+\sqrt{-31}}{2}\right)$$
$$\left(t+\frac{\sqrt{5}-\sqrt{-31}}{2}\right)\left(t+\frac{-\sqrt{5}-\sqrt{-31}}{2}\right)=0$$

egyenletnek ezt a sajátságát.* Gondolatmenetét általánosítva a következő tételt bizonyíthatjuk be.

---

* Göttinger Nachrichten 1897. p. 48.

II. *Arra nézve, hogy az*

$$f(x)=x^n+B_1x^{n-1}+\cdots+B_n=0 \tag{1}$$

irreduczibilis egyenlet, a melyben B_i raczionális egész szám és a mely a raczionális számok tartományában Galois-*féle egyenlet, minden törzsszámhatványra reduczibilis legyen; elegendő, hogy ha az* (1) *által adott számtestben minden raczionális törzsszám legalább két különböző primideállal legyen osztható.*

2. Legyen a K test a præmissának megfelelő Galois-féle számtest, tehát minden raczionális törzsszám felbontása a következő alakú:

$$p=(\mathfrak{y}_1\mathfrak{y}_2\ldots\mathfrak{y}_e)^g,\quad e>1,$$

a hol $\mathfrak{y}_i$ különböző primideálokat jelent. A K test csoportjában $r=\frac{n}{e}$ számú helyettesítés van, a mely pl. a $\mathfrak{y}_1$ primideált önmagába viszi át. Tartozzék e helyettesítésekhez a k alsóbb számtest. Hilbert vizsgálatai alapján a k testben*

$$p=\mathfrak{P}\mathfrak{a},\quad \mathfrak{P}=\mathfrak{y}_1^g,$$

a hol $\mathfrak{P}$ oly elsőrendű primideál, a mely az $\mathfrak{a}$ ideálhoz relativ prim. Az adott egyenlet Galois-féle lévén, a k testben e számú r-edfokú tényezőre bontható, tehát lesz:

$$f(x)=\prod_{h=1}^{e}(x^r+\omega_{1h}x^{r-1}+\cdots+\omega_{rh}), \tag{2}$$

a hol, mint az ideálelméletből ismeretes, az ω_{lh} számok egész számok a k testben. Mivel a $\mathfrak{P}$ elsőrendű primideál p-nek csak egyszerű tényezője, azért minden adott a kitevőhöz meghatározhatók az a_{lh} raczionális egész számok úgy, hogy legyen

$$\omega_{lh}\equiv a_{lh}\,(\text{mod. }\mathfrak{P}^a).\quad \binom{l=1,2,\ldots,r}{h=1,2,\ldots,e}$$

És így

$$f(x)\equiv\prod_{h=1}^{e}(x^r+a_{1h}x^{r-1}+\cdots+a_{rh})\,(\text{mod. }\mathfrak{P}^a)$$

* Jahresbericht d. Deutschen Math. Vereinigung IV. p. 253.

vagyis

$$f(x) \equiv \prod_{h=1}^{e}(x^r + a_{1h}x^{r-1} + \cdots + a_{rh}) \pmod{p^\alpha}. \tag{3}$$

III.

1. Az irreduczibilitás fogalma általános m modulusra következőkép adható.

Valamely

$$f(x) \equiv x^n + C_1 x^{n-1} + \cdots + C_k \pmod{m} \tag{1}$$

kifejezés, a hol C_i raczionális egész számot jelent, reduczibilis, ha oly raczionális egész együtthatójú tényezők szorzatára bontható, a melyek fokszámainak összege $= n$-el.

A fokszámokra vonatkozó megszoritás, a mely törzsszámhatvány modulusokra lényegtelen;* lényeges általános modulus esetére. Ugyanis lehet pl. a adott értéke mellett oly raczionális egész b_1, b_2, c_1, c_2 egész számokat találni, a melyek kielégítik az:

$$x + a \equiv (b_1 x + b_2)(c_1 x + c_2) \pmod{p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2}}$$

$$\left.\begin{matrix} b_1 \not\equiv 0 \\ c_1 \not\equiv 0 \end{matrix}\right\} \pmod{p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2}}$$

kongruencziákat. Magától értetődik, hogy az előbbi definiczió azonos a következővel.

Az (1) *kifejezés reduczibilis, ha oly raczionális egész együtthatójú tényezők szorzatára bontható, a melyekben a legmagasabb együtthatók 1-gyel egyenlők.*

2. A HILBERT által közölt egyenlet minden törzsszámhatványra nézve másodfokú tényezőkre lévén bontható, egyszersmind minden modulusra reduczibilis. A

$$P_n(x) = 0$$

egyenletek között is könnyű ilyeneket találni. Igy pl. ilyen egyenletet kapunk, ha

$$n = \prod_i p_i, \quad i \geqq 3,$$

a hol a p_i-k különböző $2^k + 1$-alakú törzsszámokat jelentenek.

Bauer Mihály.

---

* Hogy ez az állítás (mod. p^α), $\alpha > 1$ helyes, kitünik a már idézett SCHÖNEMANN-féle vizsgálatokból.

GÖMBÖLYÜ VÉGÉVEL VÍZSZINTES LAPRA TÁMASZKODÓ SÚLYOS PÁLCZA MOZGÁSA.

(Első közlemény.)

1. Alul félgömbben végződő, hengeres homogén pálcza horizontális sík lapra támaszkodik. Ha a pálcza felső végét elengedjük, a pálcza mozgásnak indul. E mozgást kivánjuk vizsgálat tárgyává tenni.

Egy merev pontrendszer mozgását meghatározza a hat d'Alembert-féle mozgásegyenlet:

$$
\begin{aligned}
&\Sigma m_i \frac{d^2x_i}{dt^2} = \Sigma X_i & &\Sigma m_i\left(\frac{d^2z_i}{dt^2} y_i - \frac{d^2y_i}{dt^2} z_i\right) = \Sigma (Z_i y_i - Y_i z_i) \\
&\Sigma m_i \frac{d^2y_i}{dt^2} = \Sigma Y_i & &\Sigma m_i\left(\frac{d^2x_i}{dt^2} z_i - \frac{d^2z_i}{dt^2} x_i\right) = \Sigma (X_i z_i - Z_i x_i) \quad (1) \\
&\Sigma m_i \frac{d^2z_i}{dt^2} = \Sigma Z_i & &\Sigma m_i\left(\frac{d^2y_i}{dt^2} x_i - \frac{d^2x_i}{dt^2} y_i\right) = \Sigma (Y_i x_i - X_i y_i).
\end{aligned}
$$

Ezen egyenletek egy a térben fix XYZ koordináta-rendszerre vannak vonatkoztatva, m_i az x_i, y_i, z_i pontban konczentrált tömeg, X_i, Y_i, Z_i az x_i, y_i, z_i pontban támadó erők eredőjének három komponense a koordináta-tengelyek irányában. Az összegezést ki kell terjeszteni mindazon pontokra, melyek a merev rendszerhez tartoznak. A merev pontrendszerről a merev testre való áttérésnél a véges számú tagok összegezését jelentő Σ jel helyébe a $\iiint$ jele lép, mivel a tömeget egy bizonyos térfogaton belül folytonosan elosztva képzeljük és az integrálás ép e térfogatra terjesztendő ki; ez esetben m_i nem véges tömeg, hanem helyébe $\varepsilon\, dx\, dy\, dz$ lép, hol ε az x, y, z pontban a tömeg sűrűsége.

2. A vizsgált mozgásnál a mozgásegyenletek száma háromra redukálható. A test alakjából és homogeneitásából következik, hogy a mozgásnak a henger tengelyén átmenő vertikális síkra szimmetrikusan kell történnie, vagyis e síkban fekvő pontok onnan ki nem mozdulhatnak. Ha e síkot XY síknak választjuk, minden egyes pontra nézve

$$\frac{dz_i}{dt} = 0 \qquad \frac{d^2z_i}{dt^2} = 0.$$

Másrészt minden egyes x_i, y_i, z_i pontnak megfelel egy x_i, y_i, $-z_i$ pont úgy, hogy $\frac{dx_i}{dt}$ mindkét pontra nézve állandóan azonos. Ily módon a két összeg azonosan zérust ad.

Vagyis

$$\Sigma m_i \frac{d^2z_i}{dt^2} = 0$$

$$\Sigma m_i \left(\frac{d^2z_i}{dt^2} y_i - \frac{d^2y_i}{dt^2} z_i\right) = \Sigma (Z_i y_i - Y_i z_i) = 0,$$

$$\Sigma m_i \left(\frac{d^2x_i}{dt^2} z_i - \frac{d^2z_i}{dt^2} x_i\right) = \Sigma (X_i z_i - Z_i x_i) = 0.$$

A fenmaradó három egyenlet:

$$\Sigma m_i \frac{d^2x_i}{dt^2} = \Sigma X_i$$

$$\Sigma m_i \frac{d^2y_i}{dt^2} = \Sigma Y_i \tag{2}$$

$$\Sigma m_i \left(\frac{d^2y_i}{dt^2} x_i - \frac{d^2x_i}{dt^2} y_i\right) = \Sigma (Y_i x_i - X_i y_i).$$

3. E mozgásegyenletek átalakítására bevezetünk egy a testtel együtt mozgó ABC koordináta-rendszert. A transzformáczió egyenletei legyenek

$$\begin{aligned} x_i &= x_0 + a_i \cos\varphi - b_i \sin\varphi \\ y_i &= y_0 + a_i \sin\varphi + b_i \cos\varphi \\ z_i &= c_i. \end{aligned} \tag{3}$$

Differencziálás útján

$$\frac{dx_i}{dt} = \frac{dx_0}{dt} - (y_i - y_0)\frac{d\varphi}{dt}$$

$$\frac{dy_i}{dt} = \frac{dy_0}{dt} + (x_i - x_0)\frac{d\varphi}{dt}$$

$$\frac{d^2x_i}{dt^2} = \frac{d^2x_0}{dt^2} - (x_i - x_0)\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 - (y_i - y_0)\frac{d^2\varphi}{dt^2}$$

$$\frac{d^2y_i}{dt^2} = \frac{d^2y_0}{dt^2} - (y_i - y_0)\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 + (x_i - x_0)\frac{d^2\varphi}{dt^2}. \tag{4}$$

Ezen értékeket a (2) alatti egyenletekbe helyettesítve:

$$\frac{d^2x_0}{dt^2}\Sigma m_i - [\Sigma(m_i x_i) - x_0\Sigma m_i]\left[\frac{d\varphi}{dt}\right]^2 -$$
$$- [\Sigma(m_i y_i) - y_0\Sigma m_i]\frac{d^2\varphi}{dt^2} = \Sigma X_i$$

$$\frac{d^2y_0}{dt^2}\Sigma m_i - [\Sigma(m_i y_i) - y_0\Sigma m_i]\left[\frac{d\varphi}{dt}\right]^2 +$$
$$+ [\Sigma(m_i x_i) - x_0\Sigma m_i]\frac{d^2\varphi}{dt^2} = \Sigma Y_i$$

$$\frac{d^2y_0}{dt^2}\Sigma(m_i x_i) - \frac{d^2x_0}{dt^2}\Sigma(m_i y_i) -$$
$$- \left[\Sigma m_i[(y_i - y_0)x_i - (x_i - x_0)y_i]\right]\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 +$$
$$+ \left[\Sigma m_i[(x_i - x_0)x_i + (y_i - y_0)y_i]\right]\frac{d^2\varphi}{dt^2} = \Sigma_i(Y_i x_i - X_i y_i). \tag{5}$$

Ha $\Sigma m_i = M$, $\Sigma(m_i x_i) = Mx_s$, $\Sigma(m_i y_i) = My_s$ és a harmadik egyenlet mindkét oldalához $-\Sigma(Y_i x_0 - X_i y_0)$-t adunk, a bal oldalon ΣX_i és ΣY_i értékeit helyettesítve lesz:

$$M\frac{d^2x_0}{dt^2} - M(x_s - x_0)\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 - M(y_s - y_0)\frac{d^2\varphi}{dt^2} = \Sigma X_i$$

$$M\frac{d^2y_0}{dt^2} - M(y_s - y_0)\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 + M(x_s - x_0)\frac{d^2\varphi}{dt^2} = \Sigma Y_i$$

$$M\left(\frac{d^2y_0}{dt^2}(x_s - x_0) - \frac{d^2x_0}{dt^2}(y_s - y_0)\right) +$$
$$+ \left[\Sigma m_i[(x_i - x_0)^2 + (y_i - y_0)^2]\right]\frac{d^2\varphi}{dt^2} =$$
$$= \Sigma[Y_i(x_i - x_0) - X_i(y_i - y_0)].$$

$\Sigma m_i[(x_i-x_0)^2+(y_i-y_0)^2]=I$ a test tehetetlenségi nyomatéka a C tengely körül, $\Sigma Y_i(x_i-x_0)-X_i(y_i-y_0)=N$ az erők nyomatéka ugyanezen tengely körül. E jelölésekkel

$$
\begin{aligned}
M\frac{d^2x_0}{dt^2}-M(x_s-x_0)\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2-M(y_s-y_0)\frac{d^2\varphi}{dt^2}&=\Sigma X_i\\
M\frac{d^2y_0}{dt^2}-M(y_s-y_0)\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2+M(x_s-x_0)\frac{d^2\varphi}{dt^2}&=\Sigma Y_i \qquad (6)\\
M\left(\frac{d^2y_0}{dt^2}(x_s-x_0)-\frac{d^2x_0}{dt^2}(y_s-y_0)\right)+I\frac{d^2\varphi}{dt^2}&=N.
\end{aligned}
$$

Ezen egyenletek különösen egyszerű alakot öltenek, ha $x_0=x_s$, $y_0=y_s$.

Ekkor marad:

$$
\begin{aligned}
M\frac{d^2x_s}{dt^2}&=\Sigma X_i.\\
M\frac{d^2y_s}{dt^2}&=\Sigma Y_i \qquad (7)\\
I\frac{d^2\varphi}{dt^2}&=N.
\end{aligned}
$$

4. A (7) alatti egyenletrendszer azt az ismeretes eredményt tünteti fel, hogy a súlypont úgy mozog, mintha az egész tömeg ott lenne konczentrálva és az összes erők ott támadnának. Maga a test rotácziót végez egy a súlyponton átmenő tengely körül, melynek általános térbeli mozgásnál minden pillanatban nemcsak helye, de iránya is más; sík mozgásnál iránya állandó, mert mindig merőleges a mozgás síkjára. Ennek megfelelő, áttekinthető kifejezést nyerünk a mozgó rendszer eleven erejére. Az eleven erő változása, ha a rendszer x_i, y_i, z_i pontja dx_i, dy_i, dz_i elmozdulást végzett

$$
\begin{aligned}
d\left\{\tfrac{1}{2}\Sigma m_i\left(\frac{dx_i}{dt}\right)^2+\tfrac{1}{2}\Sigma m_i\left(\frac{dy_i}{dt}\right)^2+\tfrac{1}{2}\Sigma m_i\left(\frac{dz_i}{dt}\right)^2\right\}&=\\
=\Sigma(X_i\,dx_i+Y_i\,dy_i+Z_i\,dz_i).
\end{aligned}
$$

Minthogy sík mozgásnál $\frac{dz_i}{dt}=0$, $dz_i=0$

$$
d\left\{\tfrac{1}{2}\Sigma m_i\left(\frac{dx_i}{dt}\right)^2+\tfrac{1}{2}\Sigma m_i\left(\frac{dy_i}{dt}\right)^2\right\}=\Sigma(X_i\,dx_i+Y_i\,dy_i).
$$

A (4) alatti egyenletrendszerből

$$dx_i = dx_0 - (y_i - y_0)\,d\varphi$$

$$dy_i = dy_0 + (x_i - x_0)\,d\varphi,$$

tehát

$$d\left\{\tfrac{1}{2}M\left(\frac{dx_0}{dt}\right)^2 + \tfrac{1}{2}M\left(\frac{dy_0}{dt}\right)^2 + \tfrac{1}{2}M(y_s - y_0)\frac{d\varphi}{dt}\frac{dx_0}{dt} + \right.$$

$$\left. + \tfrac{1}{2}M(x_s - x_0)\frac{d\varphi}{dt}\frac{dx_0}{dt} + \tfrac{1}{2}\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 \Sigma m_i\,[(x_i - x_0)^2 + (y_i - y_0)^2]\right\} =$$

$$= dx_0\,\Sigma X_i + dy_0\,\Sigma Y_i + d\varphi\,\Sigma\big(Y_i(x_i - x_0) - X_i(y_i - y_0)\big).$$

Ha ismét $x_0 = x_s$, $y_0 = y_s$

$$d\left\{\tfrac{1}{2}M\left(\frac{dx_s}{dt}\right)^2 + \tfrac{1}{2}M\left(\frac{dy_s}{dt}\right)^2 + \tfrac{1}{2}I\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2\right\} =$$

$$= dx_0\,\Sigma X_i + dy_0\,\Sigma Y_i + N d\varphi. \tag{8}$$

Vagyis a rendszer eleven ereje áll a súlypont haladó és a test forgási sebességének megfelelő eleven erőből és az erők munkája a súlypontban egyesített eredő és a súlyponton átmenő tengely körül forgató N nyomaték munkájából.

5. A súlypont haladó és a test forgó mozgását egyetlen forgó mozgássá tehetjük össze. Elegendő megkeresnünk azt a ξ, η pontot, melynek sebessége 0. E pont általában minden pillanatban, más és más lesz. A (4) alatti egyenletek szerint

$$\frac{d\xi}{dt} = \frac{dx_0}{dt} - (\eta - y_0)\frac{d\varphi}{dt}$$

$$\frac{d\eta}{dt} = \frac{dy_0}{dt} + (\xi - x_0)\frac{d\varphi}{dt}.$$

Ha $\frac{d\xi}{dt} = 0$, $\frac{d\eta}{dt} = 0$, akkor marad:

$$\xi - x_0 = \frac{\frac{dy_0}{dt}}{\frac{d\varphi}{d}},$$

$$\eta-y_0=-\frac{\frac{dx_0}{dt}}{\frac{d\varphi}{dt}}. \tag{9}$$

A ξ, η pont távolsága x_0, y_0 ponttól

$$\rho=\sqrt{(\xi-x_0)^2+(\eta-y_0)^2}=\frac{\sqrt{\left(\frac{dx_0}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy_0}{dt}\right)^2}}{\frac{d\varphi}{dt}},$$

vagyis ha az x_0, y_0 pont sebessége v

$$\rho\frac{d\varphi}{dt}=v,$$

a mi a

$$\frac{dx_0}{dt}(\xi-x_0)+\frac{dy_0}{dt}(\eta-y_0)=0 \tag{10}$$

feltétellel együtt azt fejezi ki, hogy az x_0, y_0 pónt elfordul ξ, η pont körül. A forgás sugara ρ, sebessége $\frac{d\varphi}{dt}$. Minthogy x_0, y_0 felvételéhez semminemü feltételt nem kötöttünk, a rendszer minden egyes pontja ξ, η pont körül fordul el. A ξ, η egyértelmüleg van meghatározva, mivel a rendszer két pontjának csak azon egy esetben lehet egyidejűleg 0 sebessége, ha minden pont sebessége 0.

A rendszer eleven erejének változása

$$d\left\{\tfrac{1}{2}M\left(\frac{dx_s}{dt}\right)^2+\tfrac{1}{2}M\left(\frac{dy_s}{dt}\right)^2+\tfrac{1}{2}I\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2\right\}=$$
$$=dx_s\,\Sigma X_i+dy_s\,\Sigma Y_i+Nd\varphi$$

$$d\left\{\left[\tfrac{1}{2}M\left(\frac{\frac{dx_s}{dt}}{\frac{d\varphi}{dt}}\right)^2+\tfrac{1}{2}M\left(\frac{\frac{dy_s}{dt}}{\frac{d\varphi}{dt}}\right)^2+\tfrac{1}{2}I\right]\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2\right\}=$$
$$=\left\{\frac{dx_s}{d\varphi}\,\Sigma X_i+\frac{dy_s}{d\varphi}\,\Sigma Y_i+N\right\}d\varphi.$$

A (9) alatti egyenletek szerint

$$\frac{\frac{dx_s}{dt}}{\frac{d\varphi}{dt}} = \frac{dx_s}{d\varphi} = -(\eta - y_s)^*$$

$$\frac{\frac{dy_s}{dt}}{\frac{d\varphi}{dt}} = \frac{dy_s}{d\varphi} = \xi - x_s,$$

vagyis

$$d\left\{\tfrac{1}{2}[M(\xi - x_s)^2 + M(\eta - y_s)^2 + I]\left[\frac{d\varphi}{dt}\right]^2\right\} =$$
$$= \left[\Sigma[Y_i(\xi - x_s) - X_i(\eta - y_s) + N]\right] d\varphi.$$

Ha

$$I + M[(\xi - x_s)^2 + (\eta - y_s)^2] = I_p$$
$$N + \Sigma\left[\left(Y_i(\xi - x_s) - X_i(\eta - y_s)\right)\right] = N_p,$$

hol nyomaték és tehetetlenségi nyomaték a momentán czentrumon átmenő, az előbbivel párhuzamos tengelyre vonatkoznak, akkor

$$d\left\{\tfrac{1}{2} I_p \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2\right\} = N_p\, d\varphi. \tag{11}$$

Az eleven erő e kifejezése azonban lényegesen eltér a (8) alatti kifejezéstől, mert I_p és N_p a mozgás folyamán nem állandó.

6. A vizsgált esetben a fix X, Y koordinátarendszert úgy veszszük fel, hogy az X a horizontális síkba essék, Y vertikális legyen. A mozgó rendszer B tengelye összeessék a henger tengelyével, A legyen rá merőleges a test súlypontjában. Ekkor φ az X és A tengelyek közé zárt szög, vagy a henger tengelyének szöge a vertikálissal.

A félgömb sugara r, középpontja E, a test S súlypontjának távolsága E ponttól l. Az l nem negativ szám.

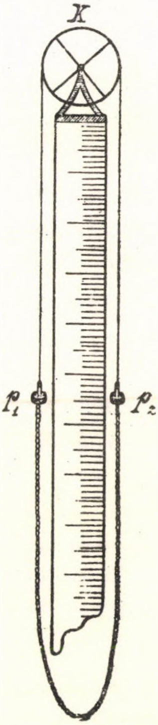
A test minden x_i, y_i, z_i pontjában ható $m_i g$ nehézségi erőt egy Mg erővé teszszük össze, mely a súlypontban támad s az Y tengely

---

* $\frac{dx_s}{d\varphi}$, $\frac{dy_s}{d\varphi}$ nem differencziálquotiensek, hanem a dt idő alatt bekövetkező elmozdulások és szögváltozások viszonya. A viszonynak mindig van értelme, kivévén ha $d\varphi$ végtelen kicsiny dx_s, ill. dy_s-hez képest. Ekkor tisztán haladó mozgásról lévén szó, az egész tárgyalásnak nincs értelme.

Az egyszerű harmonikus mozgás demonstrálása.

Az egyszerű harmonikus mozgás bemutatására igen czélszerűen felhasználhatjuk az Atwood-gépet, melylyel egyúttal a harmonikus mozgás törvényeit, rezgésidejének képletét tapasztalati úton állapíthatjuk meg. Az Atwood-gépen e czélból mindössze az a módosítás szükséges, hogy a kerék síkja a beosztott oszlop elé essék, a mit a legtöbbnyire alkalmazásban lévő iskolai Atwood-gépnél egyszerűen az által érhetünk el, hogy a kerék tengelyét tartó fémtalpat lecsavarjuk s annyira toljuk előre, esetleg egy segéd deszkaalapra erősítjük, hogy a súlyokat tartó két fonál a beosztott oszlop elébe kerüljön. A súlytartókat egyenlő p_1 és p_2 súlyokkal megterheljük; túlsúly gyanánt pedig vékony s hajlékony lánczot alkalmazunk, melynek végeit rövid fonáltoldalékkal a tartók aljára erősítjük. Vékony sárgaréz lánczot, minőt olcsóbb fali óráknál használnak, a czélnak igen jól megfelel (l. ábra). A súlyok a kétfelé osztott lánczczal egyenlő magasságban veszteg maradnak, mely helyet — a harmonikus mozgás középpontját — az oszlopon papirszelettel megjelölünk. Ha az egyik súlyt n cm-rel felemeljük, ez oldalra $2n$ cm. lánczhossznak megfelelő túlsúly jut, az magára hagyva a középpont felé fog sietni. Nyilvánvaló, hogy a mozgató erő, tehát a gyorsulás is arányos lesz a középponttól való távolsággal, mialatt az összes mozgó tömeg változatlan marad. Az így létrejött mozgás tehát szigoruan megfelel az egyszerű harmonikus vagy rezgő mozgás definicziójának. A p_1 és p_2 súlyok és a láncz hosszának kellő megválasztásával tetszésszerinti rezgési idővel biró harmonikus mozgást hozhatunk létre. A rezgésidő mérésére az Atwood-gép ingaszerkezete szolgál s a felemelt súly elbocsátására a készülék csapóasztalkáját is felhasználhatjuk; ez utóbbit szükség esetén vékony lemezkével ki lehet toldani. A surlódás s egyéb mozgás



akadályok folytán az egymásra következő kilengések tágassága fokozatosan kisebbedik, azonban középszerű Atwood-géppel 3—6 csaknem változatlan tágasságú rezgést hozhatunk létre.

Hogy a mozgó súlynak a középpont felé irányuló pozitiv, illetőleg negativ gyorsulása minden pillanatban arányos a kilengéssel, hogy különböző magasságból engedve le a súlyt, a rezgésidő független az amplitudótól, a kisérlet közvetlenül mutatja. Ha p_1 és p_2 súlyokat nagyobbitjuk, hogy az összes tömeg az előbbinek 4-szerese legyen, egyenlő amplitudó mellett a kezdetbeli gyorsulás az előbbinek negyedrésze, a rezgésidő pedig az előbbinek kétszerese lesz és ugyanazt a kezdetbeli gyorsulást 4-szeres amplitudó mellett érjük el. Kimutatható tehát, hogy egyenlő amplitudó mellett a rezgési idők forditottan arányosak a kezdetbeli gyorsulások négyzetgyökével, úgyszinte, hogy egyenlő kezdetbeli gyorsulások mellett a rezgési idők egyenes arányban vannak az amplitudók négyzetgyökével. Vagyis

$$t = C\sqrt{\frac{a}{\gamma}}.$$

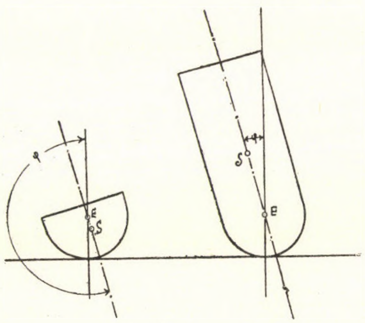
Innen a kisérleti adatok behelyettesitésével a C arányossági tényező értékét megkapjuk, hogy az

$$C = t\sqrt{\frac{\gamma}{a}} = 2\pi \text{ értékével egyenlő.}$$

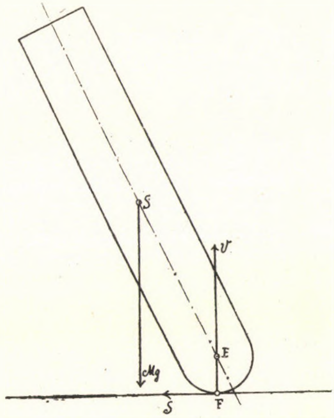
Az általam végzett kisérletsorozatnál a használt sárgaréz láncz hossza 170 cm. és tömege 24 gr. volt. Az egyik oldalra teljesen felemelt láncz tehát 85 cm. legnagyobb amplitudót engedett meg. Az egyik esetben a mozgó részek tömege (a kerék számbavett tömege, a felfüggesztett tömegek s a láncz tömege) 176 gr., a másik esetben pedig $4 \times 176 = 704$ gr.-ot tett ki. A kisérletsorozat eredményét a következő táblázat tünteti fel:

Összestömeg	Amplitudó (a)	Túlsúly	Kezdetbeli gyorsulás (γ)	Rezgési idő (t)
176 gr.	85 cm.	24 gr.	134 cm. sec.^{2}	5 sec.
176 «	$21\,^1/_4$ «	6 «	33·5 «	5 «
704 «	85 «	24 «	33·5 «	10 «

irányában negativ értelemben működik. A horizontális lap befolyását a mozgásra két erő behozatalával veszszük figyelembe. A V re-



1. ábra.



2. ábra.

akczió erő merőleges a kényszerpályára, az S surlódó erő a pálya irányába, vagyis az X tengelybe esik.

Mindkét erő támadáspontja a test és a sík lap érintkező F pontja. V pozitiv értelmű, S értelme mindig ellenkező F pont elmozdulásával.

E szerint a mozgás egyenletei

$$\begin{aligned} M\frac{d^2x_s}{dt^2} &= S \\ M\frac{d^2y_s}{dt^2} &= V - Mg \\ I\frac{d^2\varphi}{dt^2} &= Sy_s + Vl\sin\varphi. \end{aligned} \tag{12}$$

Ha $S=Ms$, $V=Mv$, $I=Mk^2$, akkor rövidebben:

$$\begin{aligned} \frac{d^2x_s}{dt^2} &= s \\ \frac{d^2y_s}{dt^2} &= v - g \\ k^2\frac{d^2\varphi}{dt^2} &= sy_s + vl\sin\varphi. \end{aligned} \tag{13}$$

Kármán Tivadar.

HANGHULLÁMOK INTERFERENTIÁJA.

Két egyenlő erős hanghullám interferentiájából származó hang elnémulását és erősödését a Quincke-féle műszerrel közvetlenül meggyőző módon, egyszerre nagyobb hallgatóság előtt is demonstrálhatjuk, ha azt egy fonográffal kapcsoljuk össze. E czélból a fonográf hangvisszaadó szerkezetét a hangerősítő tölcsér helyett a Quincke-féle műszer egyik nyilásával körülbelől 15—20 cm. hosszú kaucsuk cső segélyével kötjük össze, míg a másik nyilásához hasonló kaucsuk csővel hangerősítő tölcsért vagy a fonográf hallgató csövét kapcsoljuk, úgy hogy a fonográf és hangtölcsére közé a Quincke-féle műszer van beiktatva. A fonográffal előzőleg a rendes módon egyszerű, felhangoktól lehetőleg mentes zenei hangot veszünk fel, pl. hangvilla vagy tágas, fedett orgonasíp hangját. Ily módon igen jól izolált hangforrásra tettünk szert, mert a fonográf által visszaadott hanghullámok csakis a Quincke-féle műszer ágain át juthatnak el a hangerősítő tölcsérhez. Ha a Quincke-féle műszer ágai össze vannak tolva, a fonográf hangja a tölcsérből erősen hangzik, de a hang mindjobban elgyengül, a mint a műszer egyik ágát kijebb huzzuk és teljesen elnémul, mihelyt a kihuzás megfelel a hang félhullámhosszának. Továbbmenő kihuzással a hang újból erősödik. Ha a fonográffal felvett zenei hang nem teljesen mentes a felhangoktól, úgy a megfelelő kihuzásnál csak az alaphang némul el, míg a felhangok vagy esetleg a fonográftól származó mellékzöngék gyengén tovább hangzanak: azért lehetőleg arra kell törekedni, hogy a fonográf tiszta, egyszerű hangot adjon vissza.

A nyert számértékek a rezgési időnek fentebb kifejezett törvényét igazolják:

$$C = 5\sqrt{\frac{134}{85}} = 5\sqrt{1.5765} = 6{\cdot}28.$$

Két tizedes jegyig megadja a 2π értékét, tehát a rezgési idő:

$$t = 2\pi\sqrt{\frac{a}{r}}.$$

A szabadon eső test sebességének meghatározása fotografikus úton.

A szabadon eső test sebességét utjának valamely pontján tudvalevőleg a $\frac{ds}{dt}$ differencziálhányados fejezi ki. Ez utóbbi hányados értékének elég pontos meghatározását, egyszersmint a differencziálhányados érzékítését nyerjük fotografikus úton a következő eljárással. Állítsunk fel 3—4 m. hosszú, 15—20 cm. széles, cm-ekre beosztott mérőléczet, melyen az osztásvonalak fehér alapon vannak felrakva. A mérőlécz felső részén függesszünk fel körülbelül tenyérnyi nagyságú négyszögletes fémlemezt, úgy hogy a lemez közvetlen a mérőlécz beosztott síkja előtt függjön és felső vízszintes oldala a zérus osztásvonallal essék össze. A fémlemeznek szemben fekvő lapját fénytelen fekete festékkel vonjuk be. E feketére festett lemezt a tartó fonál elégetése által, vagy elektromágneses kicsatoló segélyével a kivánt pillanatban leejtjük és azt esése közben pontosan és gyorsan működő, pillanatzárral felszerelt fotografáló készülékkel lefotografáljuk, ügyelve arra, hogy a pillanatzárt épen azon pillanatban indítsuk meg, a mikor a leeső lemez a mérőléczнek előzetesen élesre beállitott osztásvonalai előtt halad el, és hogy annak képe lehetőleg az érzékeny lemez középtájára essék, a mit kis gyakorlattal könnyen elérhetünk. Az érzékeny lemezen a leeső fekete lapnak függélyes irányban elcsuszott elég éles képét kapjuk meg azon n edik osztásvonal mellett, melyet az eső test azon pillanatban elért. A fotografálást erős napfényes időben kell végezni. Az elcsuszódásnak élesebben határolt s az esetleg zavaró árnyékvetéstől teljesen ment képét kapjuk, ha egy nagyobb felületű feketére mázolt fémlemezre pontosan kimért négyzetalakú fehér papirlapot ragasztunk, ez utóbbinak képe a negativon világos alapon sötéten jelenik meg.

A kép elcsuszása tehát azon kis utat (σ) ábrázolja, melyet az eső test az n-edik cm-nél a kintartás kis ideje (τ) alatt megtett. E kis útnak pontos lemérését legczélszerűbben úgy eszközölhetjük, hogy a mérőléczneк megfelelő osztásvonalai mellett (esetleg több helyen) a leejtett lemezzel pontosan egyenlő területű fekete kartonlapot ragasztunk fel, miáltal a negativon ez utóbbinak képe közvetlenül összemérhető a mozgó lemezével. Az összemérendő két képet a negativról ernyőre megfelelő nagyságban vetítjük s ezek különbsége adja a σ kis utat. Kisérlet előtt a pillanatzár működésének sebességét a lehető legnagyobb pontossággal meg kell határozni, a mit pl. az e czélra általánosan ajánlott forgókorong-módszerrel eszközölhetünk. Az ily módon meghatározott σ és τ viszonya adja meg a szabadon eső test sebességét, melyet az útjának n-edik cm-énél birt.

$$v_n = \frac{\sigma}{\tau} = \frac{ds}{dt} \text{ és innen } g = \sqrt{\frac{v^2}{2n}}.$$

A kisérlet sikere legfőképen attól függ, hogy nagyon gyorsan és szabatosan működő pillanatzárt használjunk s annak működési sebességét a lehető pontossággal meghatározzuk. A STEINHEIL-féle universal-, vagy az ANSCHÜTZ-féle réses pillanatzár a czélnak jól megfelel. Az előbbi $1/200$ mp-ig, az utóbbi még jóval kisebb időtartamú felvételeket enged meg.

Dietz Lajos.

ÉRTESITŐ A MATH. ÉS PHYS. TÁRSULAT ELŐADÁSAIRÓL.*

1900. január 18. KŐNIG GYULA: A legnagyobb közös osztóról.
KŐVESLIGETHY RADÓ: A physikai astronomia ujabb haladásáról.

— február 1. B. EÖTVÖS LORÁND: A mágneses inklináczió a mult időkben.
KÜRSCHÁK JÓZSEF: Az indukált helyettesítések determinánsának rangjáról.

— február 15. KÜRSCHÁK JÓZSEF: A geometria alapjairól (Antiarchimedesi geometria).
KÖVESLIGETHY RADÓ: A látás az ó-korban.

— márczius 1. KÖVESLIGETHY RADÓ: A Nap sugárzása.
RADOS GUSZTÁV: Az analizis köréből; KŐNIG GYULA megjegyzéseivel æquivalenczia és invariánczia czímén.

— márczius 22. SCHULLER ALAJOS: Az optikai gyűjtő- és szóró-szerkezetek teljes megkülönböztetéséről.
Ugyanaz: Newton-féle színgyűrük, szappanoldat-lemezek szineinek vetítése.

— április 5. BAUER MIHÁLY: Adalékok a véges csoportok elméletéhez.
HOOR MÓR: Az elektrotechnika modern preczíziós módszerei.

— április 30. VII. rendes közgyűlés. ld. IX. köt. 249. l.

— november 8. A VII. mathematikai tanulóverseny eredményének kihirdetése és a díjak kiosztása.
VISNYA ALADÁR: Indukált quadratikus alakokról.
ZEMPLÉN GYŐZŐ: A kinetikai gázelmélet alaphipotéziseiről.

— november 22. SZABÓ PÉTER: Az arithmetika axiomáiról.

— deczember 6. BAUER MIHÁLY: A Fermat-féle kongruencziatétel elméletéhez.

---

* A VIII. kötetben 420. lapon adott értesítő folytatása.

Mikola Sándor: A közelhatás postulatumai.

1901. január 10. Csillag Vilmos: A szabályos tizenkétszög területének meghatározása szemléleti úton. Kürschák József megjegyzéseivel «π megközelítése raczionális számokban geometriai úton» czímen.

Kövesligethy Radó: Gázok elillanása a bolygók légköréből.

— január 24. Kürschák József: Meusnier tételének általánosítása.

Kövesligethy Radó: Idő- és helyhatározás eszközök nélkül.

— február 7. Fejér Lipót: A divergens Fourier-sorokról.

— február 21. Gruber Nándor: Egész számok hatványösszegeiről.

Kövesligethy Radó: Sirius színe az ó-korban.

— márczius 7. Demeczky Mihály: A primszámok egy osztályozásáról.

Klatt Román: Szulfidok foszforeszczencziája.

— márczius 21. Hoor Mór: Adatok a dielektromos testek fizikájához.

Juckel Gyula: A börzespekuláczió mathematikai elmélete.

— április 30. VIII. rendes közgyűlés. ld. X. köt. 256. l.

— november 7. A VIII. mathematikai tanulóverseny eredményének kihirdetése és a díjak kiosztása.

Rados Ignácz: A függvénydetermináns algebrai elmélete.

— november 21. Kalecsinszky Sándor: Meleg sóstavakon végzett tanulmányok eredményeiről.

Kürschák József: Látogatás Gaussnál (Mentovich naplótöredéke).

— deczember 5. Rados Gusztáv: Elemi sokszögtételek általánosítása.

Cholnoky Jenő: A futóhomok mozgásának törvényeiről.

1902. január 9. Kürschák József: A gömbháromszögtan alapegyenleteinek egyik alaptulajdonsága.

Kövesligethy Radó: A Föld története (G. H. Darwin «The tides and kindred phenomena in the solar system» nyomán).

VIZSGÁLATOK A FOURIER-FÉLE SOROK KÖRÉBŐL.

(Első közlemény.)

E dolgozat az analizis oly thémájával foglalkozik, a melynek elméletét a mathematikusok, már vagy 15 év előtt kimerítettnek, lezártnak tekintették és melyről azóta nem is írtak valami lényegesen újat.

Egy hatalmas szempont, melyet POINCARÉ, STIELTJES és különösen BOREL * vitték be a komplex változó hatványsorának elméletébe, az általános függvénytan klasszikus sorfejtésére — a FOURIER-féle sorra alkalmazva is meglepő eredményekre vezetett. Ismeretes, hogy DIRICHLET, sőt úgy látszik RIEMANN is azt hitte, hogy pl. egy, a valós x argumentum minden értékére nézve folytonos, 2π szerint szakaszos $f(x)$ függvény FOURIER-féle sora

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(a)\,da + \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(a)\cos n(a-x)\,da\right]$$

minden x értékre nézve összetartó.

DU-BOIS-REYMOND kimutatta, hogy ez *általában nincsen* így, és oly mindenütt folytonos $f(x)$ függvényt szerkesztett, a melynek FOURIER-féle sora bármilyen kis számközön belül végtelen sok helyen *széttartó*. Minthogy egyelőre fel kell tennünk, hogy esetleg létezik olyan mindenütt folytonos függvény is, a melynek FOURIER-féle sora *sehol sem összetartó* ** — mert az ellenkezőjét eddig senki sem bizonyította be — ki kell mondanunk, hogy a

* L. É. BOREL: Leçons sur les séries divergentes 1901.

** Épen úgy mint léteznek mindenütt folytonos függvények, melyek sehol sem differencziálhatók.

folytonosságból a FOURIER-féle sor összetartására *általánosságban* nem lehet következtetni.

De BOREL felfogását szem előtt tartva — kérdezhetjük: milyen összefüggésben van a folytonos $f(x)$-szel teljesen meghatározott FOURIER-féle sor magával az $f(x)$ függvénynyel? Más szóval, nem lehet-e az

$$s_0(x),\ s_1(x), \ldots, s_n(x), \ldots$$

függvénysort, a hol

$$s_n(x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\, da + \sum_{n=1}^{n}\left[\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(a)\cos n\,(a-x)\, da\right]$$

jól lehet, hogy

$$\lim_{n=\infty} s_n(x)$$

nem létezik, mégis *egyszerű vonatkozásba hozni az $f(x)$ függvénynyel?*

Részletes kivonatot itt nem akarván adni, csak jelezzük, hogy ilyen összefüggés — és pedig fölötte egyszerű — valóban létezik.* E mellett nem fogunk csak folytonos függvényekre szorítkozni, hanem veszünk egy tetszőleges — *a 0-tól 2π-ig terjedő számközre integrálható függvényt,* a mely *véges számú* helyen *tetszőlegesen* [de természetesen integrálhatólag] *végtelen* is lehet.

Kiemeljük, hogy általános vizsgálataink sok tekintetben új fényt vetnek az *összetartó* FOURIER-féle sorok elméletének több fontos kérdésére is. Ezen az első alkalmazáson kívül még — mindig egy és ugyanazon forrásból — a POISSON-féle integrál elméletét, az általános függvénytan egy fontos tételét a — WEIERSTRASS-féle tételt a folytonos függvényekről — fogjuk levezetni, hozzácsatolván még az utóbbi tétel néhány alkalmazását.**

*

---

* L. a következő fejezet elejét.

** E dolgozatban foglalt néhány főeredmény a *Comptes Rendus* 1900. évi decz. 10-iki számában, továbbá a M. Tud. Akadémia Math. értesítőjének 1901. évi 3-ik füzetében jelent meg.

A Fourier-féle sor summabilitásáról.*

Legyen $f(x)$ a 0-tól 2π-ig terjedő számközön belül *véges* és *integrálható* függvény; akkor az $f(x)$-hez tartozó

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\alpha)\,d\alpha+\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(\alpha)\cos n(\alpha-x)\,d\alpha\right] \tag{1}$$

Fourier-féle sort csak oly x helyeken akarjuk vizsgálni, a hol az $f(x)$ vagy *folytonos, vagy elsőfajú szakadása* van [azaz $f(x+0)$, $f(x-0)$ határértékek léteznek, de különbözők]. *Ha x ilyen hely, akkor az* (1) *alatti sor összetartása, vagyis az*

$$s_0(x),\ s_1(x),\ldots,\ s_n(x),\ldots$$

$$s_n(x)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\alpha)\,d\alpha+\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(\alpha)\cos k(\alpha-x)\,d\alpha\right]$$

számsorozat összetartása általában kétes, de az

$$s_0(x),\ \frac{s_0(x)+s_1(x)}{2},\ldots,\ \frac{s_0(x)+s_1(x)+\cdots+s_{n-1}(x)}{n},\ldots$$

sorozat már mindig összetartó és határértéke

$$\tfrac{1}{2}[f(x+0)+f(x-0)].$$

Előrebocsátjuk, hogy az

$$\tfrac{1}{2}+\cos\vartheta+\cos 2\vartheta+\cdots+\cos(n-1)\vartheta+\cdots$$

sor széttartása is ilyen egyszerű természetű. Itt ugyanis

---

* Az

$$a_0+a_1+a_2+\cdots+a_{n-1}+\cdots$$

végtelen sort *summabilis*-nak mondjuk, ha létezik a

$$\lim_{n=\infty}.\frac{s_0+s_1+\cdots+s_{n-1}}{n}$$

határérték, hol

$$s_n=a_0+a_1+\cdots+a_n.$$

$$\sigma_{n-1} = \tfrac{1}{2} + \cos\vartheta + \cdots + \cos(n-1)\vartheta = \frac{1}{2}\,\frac{\cos(n-1)\vartheta - \cos n\vartheta}{1-\cos\vartheta}$$

és így

$$\frac{\sigma_0+\sigma_1+\cdots+\sigma_{n-1}}{n} = \frac{1}{2n}\,\frac{1-\cos n\vartheta}{1-\cos\vartheta}. \tag{2}$$

Ha tehát $\vartheta \gtrless 2k\pi$ $(k=0, \pm 1, \pm 2\ldots)$, akkor

$$\lim_{n=\infty} \frac{\sigma_0+\sigma_1+\cdots+\sigma_{n-1}}{n} = 0.$$

Legyen most már rövidség kedvéért

$$\frac{s_0(x)+s_1(x)+\cdots+s_{n-1}(x)}{n} = S_n(x),$$

akkor a (2) alatti képlet felhasználásával $S_n(x)$ számára a következő egyszerű alakot kapjuk

$$S_n(x) = \frac{1}{2n\pi}\int_0^{2\pi} \frac{1-\cos n(\alpha-x)}{1-\cos(\alpha-x)} f(\alpha)\,d\alpha, \tag{3}$$

mely integrál az

$$\frac{\alpha-x}{2} = \beta$$

helyettesítés révén az

$$S_n(x) = \frac{1}{n\pi}\int_{-\frac{x}{2}}^{\pi-\frac{x}{2}} \left(\frac{\sin n\beta}{\sin\beta}\right)^2 f(x+2\beta)\,d\beta \tag{3'}$$

alakba megy át.

Míg tehát a FOURIER-féle sorok elméletében az

$$s_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\frac{x}{2}}^{\pi-\frac{x}{2}} \frac{\sin(2n-1)\beta}{\sin\beta} f(x+2\beta)\,d\beta$$

DIRICHLET-féle integrál határértékének a vizsgálatáról van szó, midőn n minden határon túl nagyobbodik, addig mi a (3′) alatti integrál határértékének a meghatározására vagyunk utalva.

A két integrál közül a (3') alatti egyszerűbb természetű. Míg ugyanis a DIRICHLET-féle integrálnál az f függvény mellett mint tényező $\frac{\sin \overline{2n-1}\beta}{\sin \beta}$ áll — oly függvény, a melynél az *előjelváltozások* száma az n-nel minden határon túl nő — addig az $S_n(x)$ integrálnál a sohasem negativ $\left(\frac{\sin n\beta}{\sin \beta}\right)^2$ tényező lép fel. Ez utóbbi körülménynek köszönhető, hogy a

$$\lim_{n=\infty} S_n(x)$$

határérték vizsgálatánál már az első középérték-tétel alkalmazása czélhoz vezet, míg a

$$\lim_{n=\infty} s_n(x)$$

vizsgálatánál — tudvalevőleg — a második középértéktételre van szükségünk. Legyen most már x a $(0, 2\pi)$ számközön belül oly hely, a hol $f(x)$ folytonos, akkor egy tetszőleges kicsiny pozitiv számhoz δ-hoz találhatunk ε pozitiv számot, úgy hogy

$$|f(x+h)-f(x)| < \delta$$

valahányszor

$$|h| \leqq \varepsilon.$$

Az ilyen módon választott ε-hoz az $S_n(x)$, [melynek ezentúl (3) alatti alakját használjuk] következő szétbontása tartozik

$$S_n(x) = \frac{1}{2n\pi}\int_0^{x-\varepsilon} \frac{1-\cos n(a-x)}{1-\cos(a-x)} f(a)\,da +$$

$$+\frac{1}{2n\pi}\int_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon} \frac{1-\cos n(a-x)}{1-\cos(a-x)} f(a)\,da +$$

$$+\frac{1}{2n\pi}\int_{x+\varepsilon}^{2\pi} \frac{1-\cos n(a-x)}{1-\cos(a-x)} f(a)\,da.$$

Legyen M az $f(x)$ függvény felső határa a $\overline{0, 2\pi}$ számközre nézve: akkor bizonyára

$$\left|\frac{1}{2n\pi}\int_0^{x-\varepsilon}\frac{1-\cos n(\alpha-x)}{1-\cos(\alpha-x)}f(\alpha)\,d\alpha\right|<\frac{1}{2n\pi}\,\frac{2M(x-\varepsilon)}{1-\cos\varepsilon}$$

vagy mert

$$x-\varepsilon<2\pi$$

$$\left|\frac{1}{2n\pi}\int_0^{x-\varepsilon}\frac{1-\cos n(\alpha-x)}{1-\cos(\alpha-x)}f(\alpha)\,d\alpha\right|<\frac{1}{n}\,\frac{2M}{1-\cos\varepsilon}.$$

Hasonlóképen

$$\left|\frac{1}{2n\pi}\int_{x+\varepsilon}^{2\pi}\frac{1-\cos n(\alpha-x)}{1-\cos(\alpha-x)}f(\alpha)\,d\alpha\right|<\frac{1}{n}\,\frac{2M}{1-\cos\varepsilon}.$$

Ámde az első középértéktétel alkalmazásával [ez lehetséges, mert $\frac{1-\cos n(\alpha-x)}{1-\cos(\alpha-x)}$ sohasem negativ]

$$\int_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon}\frac{1-\cos n(\alpha-x)}{1-\cos(\alpha-x)}f(\alpha)\,d\alpha=[f(x)+\eta]\int_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon}\frac{1-\cos n(\alpha-x)}{1-\cos(\alpha-x)}\,d\alpha$$

hol $|\eta|<\delta$. Tehát

$$S_n(x)=[f(x)+\eta]\frac{1}{2n\pi}\int_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon}\frac{1-\cos n(\alpha-x)}{1-\cos(\alpha-x)}\,d\alpha+\varepsilon_n'$$

hol

$$\lim_{n=\infty}.\ \varepsilon_n'=0.$$

Ámde

$$\frac{1}{2n\pi}\int_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon}\frac{1-\cos n(\alpha-x)}{1-\cos(\alpha-x)}\,d\alpha=\frac{1}{2n\pi}\int_0^{2\pi}\frac{1-\cos n(\alpha-x)}{1-\cos(\alpha-x)}\,d\alpha-$$

$$-\left[\frac{1}{2n\pi}\int_0^{x-\varepsilon}\frac{1-\cos n(\alpha-x)}{1-\cos(\alpha-x)}\,d\alpha+\frac{1}{2n\pi}\int_{x+\varepsilon}^{2\pi}\frac{1-\cos n(\alpha-x)}{1-\cos(\alpha-x)}\,d\alpha\right],$$

hol a zárójelben lévő részek mindegyike abszolut értékre nézve kisebb

$$\frac{1}{n}\,\frac{2.1}{1-\cos\varepsilon}\text{-nál},$$

és a (2) alatti azonosság felhasználásával

$$\frac{1}{2n\pi}\int_0^{2\pi}\frac{1-\cos n(\alpha-x)}{1-\cos(\alpha-x)}\,d\alpha=1,$$

tehát

$$\frac{1}{2n\pi}\int_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon}\frac{1-\cos n(\alpha-x)}{1-\cos(\alpha-x)}\,d\alpha=1+\varepsilon_n'',$$

hol

$$\lim_{n=\infty}.\ \varepsilon_n''=0.$$

E szerint

$$S_n(x)=[f(x)+\eta][1+\varepsilon_n'']+\varepsilon_n'$$

vagy

$$S_n(x)-f(x)=\eta+\varepsilon_n''f(x)+\varepsilon_n''\eta+\varepsilon_n'$$

és így ha n elegendő nagy

$$|S_n(x)-f(x)|<2\delta$$

a mit bizonyítani akartunk.

Ha a függvénynek az x helyen *elsőfajú szakadása* van, akkor az $S_n(x)$ integrált az

$$I_1(x)=\frac{1}{2n\pi}\int_0^{x}\frac{1-\cos n(\alpha-x)}{1-\cos(\alpha-x)}f(\alpha)\,d\alpha$$

és

$$I_2(x)=\frac{1}{2n\pi}\int_x^{2\pi}\frac{1-\cos n(\alpha-x)}{1-\cos(\alpha-x)}f(\alpha)\ \alpha$$

részekre osztjuk, és az egyes integrálokra az előbbihez teljesen hasonló meggondolást alkalmazva nyerjük, hogy

$$\lim_{n=\infty}.\ I_1(x)=\frac{f(x-0)}{2},\quad \lim_{n=\infty}.\ I_2(x)=\frac{f(x+0)}{2}$$

és így

$$\lim_{n=\infty}.\ S_n(x)=\tfrac{1}{2}[f(x+0)+f(x-0)].$$

Igen egyszerű továbbá még a

$$\lim_{n=\infty}.\ S_n(0)=\frac{f(+0)+f(2\pi-0)}{2}$$

kiegészítésnek a bebizonyítása is.

Mellékesen megjegyezzük még, hogy az $S_n(x)$ sorozat még akkor is ad némi tájékozást az $f(x)$ függvény viselkedésére nézve [és fordítva], ha az x helyen a függvénynek másodfajú szakadása van. Könnyű ugyanis belátni a következő tétel helyességét:

Legyen $f(x)$ viselkedése az x helyen *tetszőleges*. Akkor az x helyhez — a Du-Bois-Reymond-féle értelemben — négy ingadozási határ

$$\overline{\lim.}\, f(x+0),\quad \underline{\lim.}\, f(x+0),\quad \overline{\lim.}\, f(x-0),\quad \underline{\lim.}\, f(x-0)$$

tartozik. Legyen ezek között $M(x)$ a legnagyobb és $m(x)$ a legkisebb, akkor

$$m(x) \leqq \lim_{n=\infty}.\inf.\, s_n(x) \leqq \lim_{n=\infty}.\sup.\, s_n(x) \leqq M(x).$$

Ehhez analog tétel a Dirichlet-féle integrálra nézve *nem* létezik. Ismeretes ugyanis olyan véges és integrálható függvény, mely pl. a 0 helyen folytonos és $=0$-sal, míg

$$\lim_{n=\infty}.\sup.\, s_n(x) = +\infty^*$$

*

Az eddigiekben arra az esetre szorítkoztunk, midőn a függvény a $\overline{0, 2\pi}$ számközön belül véges.

Tegyük fel most, hogy $f(x)$ a 0-tól 2π-ig terjedő számköz egyik (belső) c helyén *végtelen* lesz, de úgy, hogy *integrálható* marad, vagyis

$$\lim_{\eta=0}.\int_0^{c-\eta} f(\alpha)\,d\alpha,\quad \lim_{\eta=0}.\int_{c+\eta}^{2\pi} f(\alpha)\,d\alpha$$

véges és meghatározott értékek. Akkor — mint könnyen belátható — létezik az

$$s_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\frac{x}{2}}^{\pi-\frac{x}{2}} \frac{\sin(2n-1)\beta}{\sin\beta} f(x+2\beta)\,d\beta$$

* Pl. H. A. Schwarz is szerkesztett ilyen $f(x)$ függvényt. De hozzáteszszük, hogy $\lim_{n=\infty}.\, s_n(x)$ a mondott feltételek mellett nem lehet $+\infty$. Ezt később látni fogjuk.

DIRICHLET-féle integrál is. De ismeretes, hogy a jelzett megszorításoknál maradva olyan $f(x)$ függvények szerkesztése lehetséges [RIEMANN], a melyekre nézve a

$$\lim_{n=\infty} s_n(x)$$

határérték *egy tekintetbe jövő x érték mellett sem létezik*, daczára annak, hogy a függvény a c helyet kivéve a FOURIER-féle sorba való fejtés szempontjából a lehető legegyszerűbb viselkedést mutatja (pl. eleget tesz a DIRICHLET-féle feltételeknek).

Tudjuk, hogy a szóban forgó kérdés lényegileg a következővel függ össze: Milyen föltételek mellett lesz

$$\lim_{n=\infty} \int_b^c f(x) \frac{\sin}{\cos}(na)\, da = 0 \tag{4}$$

hol $f(x)$ c-ben integrálhatólag végtelen lesz?

RIEMANN kimutatta, hogy a fenti egyenlőség fennáll, ha $f(x)$ az egész $\overline{b, c}$ számközben *véges* (és természetesen integrálható), de egyszersmind adott olyan függvényre is példát, melyre nézve a (4) alatti határérték ∞.

Itt tehát speciális kriteriumokat kellett felállitani, melyek a tétel érvényességét bizonyos — *speczialis* módon végtelenné levő, vagy *speczialis* módon integrálható — függvényekre nézve biztositják. DU-BOIS-REYMOND pl. kimutatja a (4) érvényességét, ha nemcsak

$$\int_b^c f(a)\, da,$$

hanem

$$\int_b^c |f(a)|\, da$$

is létezik, vagyis a függvény *abszolut* integrabilis.

HARNACK pedig szellemes módszerével kimutatja, hogy az

$$\int_b^c [f(a)]^2 da$$

integrál létezése elegendő arra nézve, hogy a (4) egyenlet fennálljon stb.

Azt hiszszük, hogy nem érdektelen a következő általános tétel:

Ha $f(x)$ egy a $\overline{b, c}$ számközben a c hely kivételével véges függvény, [azaz $f(x)$ véges a $\overline{b, c-\varepsilon}$ közben bármilyen kicsiny pozitiv szám is az ε], ha továbbá integrálható,* azaz

$$\lim_{\varepsilon=0} \int_b^{c-\varepsilon} f(\alpha)\, d\alpha$$

véges és meghatározott, akkor

$$\int_b^c f(\alpha) \frac{\sin}{\cos}(n\alpha)\, d\alpha$$

is létezik és

$$\lim_{n=\infty} \frac{1}{n} \int_b^c f(\alpha) \frac{\sin}{\cos}(n\alpha)\, d\alpha = 0.$$

Legyen ugyanis δ egy tetszőleges kicsiny pozitiv szám, akkor a föltétel szerint lehet találni egy ε pozitiv számot, úgy hogy

$$\left| \int_\sigma^\tau f(\alpha)\, d\alpha \right| < \delta$$

valahányszor

$$c-\varepsilon \leqq \sigma < \tau < c.$$

Ha most ε-t olyan kicsinyre szorítjuk, hogy $\sin nx$ a $\overline{c-\varepsilon, c}$ közben már csak *monoton* változik, (egy *határozott* n mellett ez mindig elérhető), akkor a *második középértéktétel* alkalmazásával

$$\int_\sigma^\tau f(x) \sin nx dx = \sin n\sigma \int_\sigma^\xi f(x)\, dx + \sin n\tau \int_\xi^\tau f(x)\, dx,$$

hol

$$\sigma < \xi < \tau.$$

Ámde

$$|\sin n\sigma|, \quad |\sin n\tau| \leqq 1$$

---

* De *tetszőleges* módon; lehet pl. az $f(x)$ a c-ben végtelen sok maximum-minimummal végtelen stb.

és

$$\left|\int_\sigma^\xi f(x)\,dx\right|,\quad \left|\int_\xi^\tau f(x)\,dx\right| < \delta,$$

tehát

$$\left|\int_\sigma^\tau f(x)\sin nx dx\right| < 2\delta$$

és így

$$\int_b^c f(x)\sin nx dx$$

valóban véges és meghatározott érték.

De azt állítjuk, hogy

$$\lim_{n=\infty} \frac{1}{n}\int_b^c f(x)\sin nx dx = 0.$$

Legyen e végből δ egy tetszőleges kicsiny pozitiv szám, és ε szintén olyan, de megint úgy választva, hogy

$$\left|\int_\sigma^\tau f(x)\,dx\right| < \delta.$$

ha

$$c-\varepsilon \leqq \sigma < \tau < c.$$

Akkor

$$\frac{1}{n}\int_b^c f(x)\sin nx dx = \frac{1}{n}\int_b^{c-\varepsilon} f(x)\sin nx dx + \frac{1}{n}\int_{c-\varepsilon}^c f(x)\sin nx dx.$$

Ámde az előbb idézett Riemann-féle tétel értelmében már

$$\lim_{n=\infty} \int_b^{c-\varepsilon} f(x)\sin nx dx = 0,$$

tehát mindenesetre

$$\left|\frac{1}{n}\int_b^{c-\varepsilon} f(x)\sin nx dx\right| < \delta,$$

ha csak $n > N$, hol N alkalmasan választandó pozitiv egész szám.

Figyelmünket tehát csak az

$$\frac{1}{n}\int_{c-\varepsilon}^{c} f(x)\sin nx dx$$

részre kell fordítanunk.

Ez integrál becslésére a $\overline{c-\varepsilon, c}$ számközt most olyan módon osztjuk fel, hogy az egyes felosztási közökben a $\sin nx$ már csak *monoton* változik. E végből legyenek egymásután

$$a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{\nu-1}, a_\nu$$

a $\frac{\pi}{2n}$ azon *páratlan* többszörösei, melyek a $\overline{c-\varepsilon, c}$ számköz belsejébe esnek. Akkor tehát

$$c-\varepsilon < a_1 < a_2 < a_3 \cdots < a_\nu < c$$

és

$$a_2 - a_1 = a_3 - a_2 = \cdots = a_\nu - a_{\nu-1} = \frac{\pi}{n}$$

és

$$0 < [a_1 - (c-\varepsilon)] \leqq \frac{\pi}{n}$$

$$0 < (c - a_\nu) \leqq \frac{\pi}{n}.$$

Ez által a következő, $(\nu+1)$ integrálra való felbontás keletkezik:

$$\int_{c-\varepsilon}^{a} f(x)\sin nx dx = \int_{c-\varepsilon}^{a_1} f(x)\sin nx dx + \int_{a_1}^{a_2} f(x)\sin nx dx +$$

$$+ \int_{a_2}^{a_3} f(x)\sin nx dx + \cdots + \int_{a_{\nu-1}}^{a_\nu} f(x)\sin nx dx + \int_{a_\nu}^{c} f(x)\sin nx dx.$$

Az első ν integrál mindegyikének abszolut értéke kisebb 2δ-nál. Ez a *második középérték tétel* alkalmazásával (a fent már egyszer végzett módon) rögtön következik.

A mi pedig az utolsó részt illeti, úgy

$$\int_{a_\nu}^{c} f(x)\sin nx dx = \lim_{\eta=0} \int_{a_\nu}^{c-\eta} f(x)\sin nx dx.$$

Ámde ugyancsak a második középérték tételből kifolyólag

$$\left|\int_a^{c-\eta} f(x)\sin nx dx\right| < 2\delta,$$

tehát

$$\left|\int_{a_\nu}^{c} f(x)\sin nx dx\right| \leqq 2\delta.$$

E szerint most már

$$\left|\int_{c-\varepsilon}^{c} f(x)\sin nx dx\right| < (\nu+1)\, 2\delta$$

és így

$$\left|\frac{1}{n}\int_{c-\varepsilon}^{c} f(x)\sin nx dx\right| < \frac{\nu+1}{n}\, 2\delta.$$

De, ámbár ν *az n-nel minden határon túl nagyobbodik, mégis*

$$(\nu+1)\frac{\pi}{n} \leqq c-(c-\varepsilon) = \varepsilon,$$

vagyis

$$\frac{\nu+1}{n} \leqq \frac{\varepsilon}{\pi},$$

tehát

$$\left|\frac{1}{n}\int_{c-\varepsilon}^{c} f(x)\sin nx dx\right| < \frac{2\varepsilon}{\pi}\cdot\delta.$$

E szerint, ha csak $n > N$

$$\left|\frac{1}{n}\int_{b}^{c} f(x)\sin nx dx\right| < \delta + \frac{2\varepsilon}{\pi}\delta$$

és mert δ tetszőleges kicsiny pozitiv szám, tehát

$$\lim_{n=\infty} \frac{1}{n}\int_{b}^{c} f(x)\sin nx dx = 0.$$

Hasonlóképen mutatható ki, hogy

$$\lim_{n=\infty} \frac{1}{n}\int_{b}^{c} f(x)\cos nx dx = 0.$$

Világos továbbá az is, hogy *ha* $f(x)$ *egy* $\overline{b, c}$ *számközben véges számú helyén integrálhatólag végtelen lesz, akkor*

$$\lim_{n=\infty} \frac{1}{n} \int_b^c f(x) \frac{\sin}{\cos} (nx)\, dx = 0.$$

*

Ezen fontos segédtétel előrebocsátása után vegyük fel ismét a

$$\lim_{n=\infty} \frac{1}{2n\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1-\cos n(\alpha-x)}{1-\cos(\alpha-x)} f(\alpha)\, d\alpha$$

határérték vizsgálatát, de arra az esetre, midőn a függvény a $\overline{0, 2\pi}$ számköz *véges számú helyén integrálhatólag végtelen lesz.*

Legyen megint x a $(0, 2\pi)$ számköznek olyan belső helye, a melyen $f(x)$ *folytonos.* Akkor a tetszőleges kicsiny pozitiv számhoz δ-hoz kijelölhető egy ε, úgy hogy

$$|f(x+h)-f(x)| < \delta,$$

ha

$$|h| \leqq \varepsilon.$$

Ismét felbontva

$$\frac{1}{2n\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1-\cos n(\alpha-x)}{1-\cos(\alpha-x)} f(\alpha)\, d\alpha =$$

$$= \frac{1}{2n\pi} \int_0^{x-\varepsilon} \frac{1-\cos n(\alpha-x)}{1-\cos(\alpha-x)} f(\alpha)\, d\alpha +$$

$$+ \frac{1}{2n\pi} \int_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon} \frac{1-\cos n(\alpha-x)}{1-\cos(\alpha-x)} f(\alpha)\, d\alpha +$$

$$+ \frac{1}{2n\pi} \int_{x+\varepsilon}^{2\pi} \frac{1-\cos n(\alpha-x)}{1-\cos(\alpha-x)} f(\alpha)\, d\alpha.$$

Ámde

$$\frac{1}{2n\pi} \int_0^{x-\varepsilon} \frac{1-\cos n(\alpha-x)}{1-\cos(\alpha-x)} f(\alpha)\, d\alpha = \frac{1}{2n\pi} \int_0^{x-\varepsilon} \frac{f(\alpha)}{1-\cos(\alpha-x)}\, d\alpha -$$

$$-\frac{1}{2n\pi}\int_0^{x-\varepsilon}\frac{f(\alpha)}{1-\cos(\alpha-x)}\cos n(\alpha-x)\,d\alpha.$$

E szétválasztás jogos, mert mindegyik integrál önönmagában létezik. Ámde itt mindkét rész határértéke $n=\infty$-re 0.

Az első részre nézve ez közvetetlenül világos, mert az $\frac{1}{n}$-nel szorzott tényező n-től független állandó:

$$\lim_{n=\infty}.\frac{1}{2n\pi}\int_0^{x-\varepsilon}\frac{f(\alpha)}{1-\cos(\alpha-x)}\cos n(\alpha-x)\,d\alpha$$

pedig az *előbb bizonyított segédtétel értelmében* * *szintén 0-t ad.* E szerint

$$\lim_{n=\infty}.\frac{1}{2n\pi}\int_0^{x-\varepsilon}\frac{1-\cos n(\alpha-x)}{1-\cos(\alpha-x)}f(\alpha)\,d\alpha=0.$$

Hasonlóképen

$$\lim_{n=\infty}.\frac{1}{2n\pi}\int_{x+\varepsilon}^{2\pi}\frac{1-\cos n(\alpha-x)}{1-\cos(\alpha-x)}f(\alpha)\,d\alpha=0.$$

E szerint csak a

$$\lim_{n=\infty}.\frac{1}{2n\pi}\int_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon}\frac{1-\cos n(\alpha-x)}{1-\cos(\alpha-x)}f(\alpha)\,d\alpha$$

határérték keresendő, a melyre nézve pedig már láttuk, hogy az *$f(x)$-el egyenlő.*

Hasonlóan tárgyalható az elsőfajú szakadás esete stb.

E vizsgálatokból kitünik, hogy az $S_n(x)$ integrál «előállító képessége» lényegesen szélesebb határok között fekszik, mint a Dirichlet-*féle integrálé.*

Minthogy

$$\lim_{n=\infty}.S_n(x)=f(x),$$

* $\frac{f(\alpha)}{1-\cos(\alpha-x)}$ ugyanis valóban eleget tesz a segédtételben követelt föltételeknek.

tehát

$$f(x) = S_1(x)+[S_2(x)-S_1(x)]+\cdots+[S_n(x)-S_{n-1}(x)]+\cdots \quad (5)$$

De

$$S_n(x) = \frac{1}{n}\{s_0(x)+s_1(x)+\cdots+s_{n-1}(x)\}$$

és mert az

$$s_0(x),\ s_1(x),\ldots,\ s_{n-1}(x)$$

függvények *véges* trigonometrikus sorok, tehát $S_n(x)$ is véges trigonometrikus sor, és pedig legfeljebb $n-1$-edrendű (ha k-adrendű véges trigonometrikus sornak nevezünk egy

$$\lambda_0+\lambda_1\cos x+\mu_1\sin x+\cdots+\lambda_k\cos kx+\mu_k\sin kx$$

alakú függvényt).

E szerint (5)-ben az $f(x)$ függvénynek véges trigonometrikus sorok szerint haladó sorfejtését nyerjük, melyben az n-edik tag legfeljebb $n-1$-edrendű. E sor összetartó mindazon x helyeken a hol a függvény folytonos vagy a hol annak elsőfajú szakadása van, föltéve, hogy az $f(x)$ függvény az *egész* $\overline{0, 2\pi}$ *számközre integrálható, és véges számú helyen végtelen.* Az ilyen függvényekről, melyek a Fourier-féle sorba való fejtés szempontjából egy igen általános függvényosztályt képviselnek, a következőkben röviden azt mondjuk, hogy *az (A) feltételeknek tesznek eleget.*

Az (5) alatti sor tehát bizonyára *minden* x értékre nézve összetartó, ha $f(x)$ olyan véges és integrálható függvény, melynek másodfajú szakadása egyáltalában nincsen; különösen tehát kivétel nélkül összetartó minden *folytonos* függvényre nézve.

Egy nevezetes körülményre kivánunk figyelmeztetni.

Legyen $f(x)$ egy *olyan,* (*A*) feltételnek megfelelő függvény, mely *összetartó** Fourier-féle sorba fejthető; legyen továbbá $\overline{b, c}$ olyan számköz $[0 \leq b < c \leq 2\pi]$, melynek belsejében $f(x)$ kivétel nélkül *folytonos.* Akkor tehát a (b, c) számköz minden belső helyére nézve

---

* Ez alatt természetesen csak azt értjük, hogy a Fourier-féle sor mindenütt összetartó a hol $f(x)$ folytonos, vagy a hol $f(x)$-nek elsőfajú szakadása van.

$$\lim_{n=\infty} s_n(x) = f(x).$$

De minthogy $f(x)$ (b, c)-ben folytonos, jogosan vethetjük fel a következő fontos kérdést:

Az

$$s_0(x), s_1(x), \ldots, s_n(x), \ldots$$

függvények *egyenletesen* konvergálnak-e *a* (b, c) *számközben az* $f(x)$ *határfüggvényhez?* *

Erre a kérdésre általában nem lehet igennel felelni. Tulajdonképen csak egy igen speciális esetre van megoldva; HEINE ugyanis kimutatta, hogy az egyenletes összetartás valóban fönnáll egy (b, c) számköz belsejében, ha a függvény a $\overline{0, 2\pi}$ számközön belül véges, végesszámu maximum-minimummal, és végesszámú szakadási helylyel bir. A bizonyítás a függvény egyszerű viselkedése mellett sem egyszerű. Minden megszorítás nélkül áll azonban a következő tétel:

Ha $f(x)$ eleget tesz az (A) föltételnek és kivétel nélkül folytonos a (b, c) számközben, akkor az

$$S_1(x), S_2(x), \ldots, S_n(x), \ldots$$

véges trigonometrikus sorokból álló függvénysorozat *egyenletesen* konvergál a (b, c) számközben az $f(x)$ határfüggvényhez.

A bizonyitásnál — egyszerűség kedvéért — *véges* és integrálható $f(x)$-re szorítkozunk. Minthogy $f(x)$ a (b, c) számköz minden belső helyén folytonos, lehetséges a tetszőleges kicsiny pozitiv δ-hoz találni egy ε-t (mely kisebb is mint ρ), úgy hogy

* Ez alatt pontosan azt értjük: Adva lévén két tetszőleges kicsiny pozitiv szám δ, ϱ, lehetséges-e olyan N egész szám kijelölése, úgy hogy

$$|s_n(x) - f(x)| < \delta$$

legyen, ha csak

$$n > N \quad \text{és} \quad b+\varrho \leqq x \leqq c-\varrho\,?$$

Az a kifejezés mód tehát, hogy «$\lim_{n=\infty} s_n(x) = s_0(x) + \sum_1^\infty [s_n(x) - s_{n-1}(x)]$ a (b, c) számköz belsejében egyenletesen összetartó» hasonló rövidítés mint a következő: «a hatványsor összetartási körének belsejében egyenletesen összetartó».

$$|f(x+h)-f(x)|<\delta,$$

ha

$$|h| \leqq \varepsilon$$

és x a $(b+\rho,\ c-\rho)$ köz egy tetszőleges helyét jelenti.

De, a régi jelöléseket megtartva

$$S_n(x)-f(x)=\eta+\varepsilon''_n f(x)+\varepsilon''_n\eta+\varepsilon'_n,$$

hol

$$|\varepsilon'_n|<\frac{1}{n}\frac{4M}{1-\cos\varepsilon}$$

$$|\varepsilon''_n|<\frac{1}{n}\frac{4}{1-\cos\varepsilon}$$

és

$$|f(x)| \leqq M, \quad |\eta|<\delta.$$

De mert, a δ-t egyszer megállapítva, a $\overline{b+\rho,\ c-\rho}$ számköz *összes* x helyeihez egy és ugyanazon ε, M rendelhető, tehát

$$|S_n(x)-f(x)|<2\delta$$

minden $b+\rho \leqq x \leqq b-\rho$ értékre ha csak n nagyobb egy bizonyos N számnál.

Ezt akartuk épen bizonyítani.

Ha most $f(x)$ *mindenütt* folytonos, 2π szerint szakaszos függvény, akkor az $f(x)$-hez tartozó Fourier-féle sorból egyszerű arithmetikai közép képezésével (tehát olyan átalakítással, mely nem is követel újabb határátmenetet) áttérhetünk (teljesen egyértelműleg) egy

$$S_1+\sum_{n=2}^{\infty}(S_n-S_{n-1}) \tag{5}$$

véges trigonometrikus sorok szerint haladó végtelen sorra, mely

1. kivétel nélkül összetartó,

2. minden véges számközre egyenletesen összetartó, míg a Fourier-féle sor esetleg egyikével sem bír ezen tulajdonságoknak.

Nem lesz talán érdektelen, ha megmutatjuk, hogy az (5) alatti sor a Fourier-féle sorhoz teljesen analog alakra hozható.

A definiczió értelmében ugyanis

$$S_n(x) = \frac{s_0(x)+s_1(x)+\cdots+s_{n-1}(x)}{n} =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(a)\, \frac{n\frac{1}{2}+(n-1)\cos(a-x)+\cdots+(n-k)\cos k(a-x)+\cdots+\cos(n-1)(a-x)}{n}\, da.$$

Tehát

$$S_{n-1}(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(a)\, \frac{\cdots+(n-1-k)\cos k(a-x)+\cdots}{n-1}\, da.$$

De

$$(n-1)(n-k) - n(n-1-k) = k,$$

tehát

$$S_n(x) - S_{n-1}(x) = \frac{1}{n(n-1)\pi}\int_0^{2\pi} f(a)\,[\cos(a-x)+2\cos 2(a-x)+\cdots+(n-1)\cos(n-1)(a-x)]\, da.$$

Tekintsük most az

$$1+e^z+e^{2z}+\cdots+e^{(n-1)z} = \frac{e^{nz}-1}{e^z-1} = \varphi_0(n) + \frac{\varphi_1(n)}{1!}z + \frac{\varphi_2(n)}{2!}z^2+\cdots$$

sorfejtést, mely a

$$\varphi_0(n),\ \varphi_1(n),\ \varphi_2(n)\ldots$$

BERNOULLI-féle függvényeket értelmezi. Mindkét oldalt z szerint differencziálva

$$e^z+2e^{2z}+\cdots+(n-1)e^{(n-1)z} = \varphi_1(n) + \frac{\varphi_2(n)}{1!}z + \frac{\varphi_3(n)}{2!}z^2 + \frac{\varphi_4(n)}{3!}z^3+\cdots$$

Ha most $z=i\xi$-t helyettesítünk és összehasonlítjuk a valós részeket

$$\cos\xi+2\cos 2\xi+\cdots+(n-1)\cos(n-1)\xi =$$
$$= \varphi_1(n) - \frac{\varphi_3(n)}{2!}\xi^2 + \frac{\varphi_5(n)}{4!}\xi^4 - \cdots$$

Jelöljük

$$_0\psi(n) = \frac{\varphi_1(n)}{n(n-1)},\ \psi_2(n) = \frac{\varphi_3(n)}{n(n-1)},\ldots,\ \psi_{2k}(n) = \frac{\varphi_{2k+1}(n)}{n(n-1)},\ldots$$

akkor, a mint a BERNOULLI-féle függvények tulajdonságaiból ismeretes, $\psi_{2k}(n)$ *egy 2k-adfokú raczionalis egész függvény*. Ha most bevezetjük a

$$c_n(\xi) = \frac{\cos\xi+2\cos 2\xi+\cdots+(n-1)\cos(n-1)\xi}{n(n-1)}$$

függvényt, akkor

$$c_n(\xi) = \psi_0(n) - \frac{\psi_2(n)}{2!}\xi^2 + \frac{\psi_4(n)}{4!}\xi^4 - \cdots$$

hol tehát $\psi_0(n)$, $\psi_2(n)$, ... az $n(n-1)$-gyel osztott páratlan rendszámú BERNOULLI-féle függvények. E sor, mint látható, bizonyos tekintetben analog a

$$\cos n\xi = 1 - \frac{n^2}{2!}\xi^2 + \frac{n^4}{4!}\xi^4 - \cdots$$

hatványsorhoz. A $c_n(\xi)$ hatványsorában a $\psi_{2k} = \frac{\varphi_{2k+1}(n)}{n(n-1)}$ *raczionalis* egész *függvény* ugyanazon szerepet játszsza, mint a $\cos n\xi$ hatványsorában az n^{2k} *hatvány*.

Most már az (5) alatti sor következőképen írható

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(a)\,da + \sum_{n=2}^{\infty}\left[\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(a)\,c_n(a-x)\,da\right]$$

egy a FOURIER-féle sorhoz hasonló szerkezetű soralak.*

Fejér Lipót.

* Világos, hogy a

$$2c_n(\xi) = \frac{\cos\xi+2\cos 2\xi+\cdots+(n-1)\cos(n-1)\xi}{\frac{n(n-1)}{2}}$$

értelmezésnél fogva a $c_n(\xi)$ számos, a cosinusra emlékeztető tulajdonsággal bír. Pl. $c_n(\xi+2\pi) = c_n(\xi)$, továbbá minden valós ξ-re $|c_n(\xi)| \leqq \frac{1}{2}$.

GÖMBÖLYÜ VÉGÉVEL VÍZSZINTES LAPRA TÁMASZKODÓ SÚLYOS PÁLCZA MOZGÁSA.

(Második közlemény.)

A három egyenletben öt ismeretlen mennyiség szerepel, tehát a mozgás csak úgy lehet teljesen meghatározva, ha e mennyiségek közt még két független összefüggés áll fenn. A három mechanikai egyenlethez jön az ú. n. geometriai egyenlet, mely azt fejezi ki, hogy a test a horizontális lapon marad

$$y_s = l \cos\varphi + r. \tag{14}$$

Az ötödik összefüggést valamely, a surlódó erő nagyságáról tett feltevésünk szolgáltatja.

7. Először tegyük fel, hogy a horizontális lap tökéletesen surlódó felszínnel bír, vagyis rajta csak gördülés lehetséges, csúszás nem állhat be. E feltétellel a test tulajdonképen előirt pályán mozog. Az XY síkkal kimetszett idom összes pontjai cyclois-ivekben mozognak, az E pont egy az X tengelylyel párhuzamos egyenesen, mely tulajdonképen a nyújtott cyclois határalakzata. Ha az XY koordináta-rendszer kezdőpontját azon pontba helyezzük, melyben a test és a sík lap érintkeznek a $\varphi=0$ értéknek megfelelő helyzetben, a súlypont pályájának egyenletei

$$x_s = -r\varphi - l\sin\varphi,$$
$$y_s = r + l\cos\varphi. \tag{15}$$

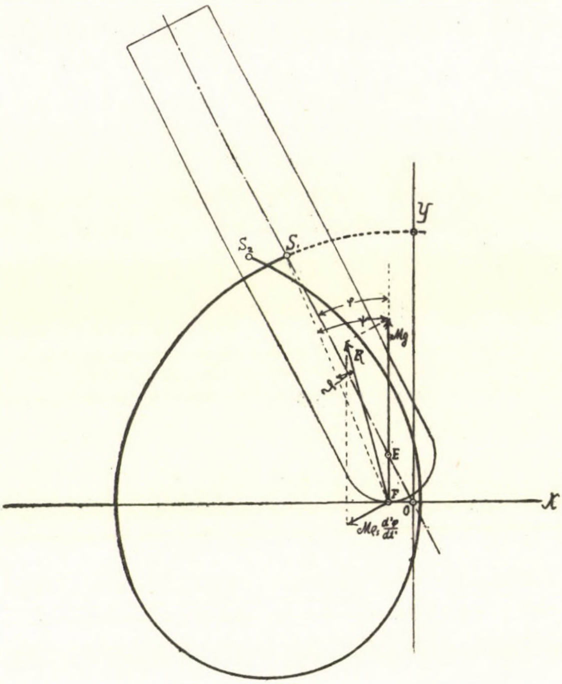
Differencziálás útján

$$\frac{dx_s}{dt} = -r\frac{d\varphi}{dt} - l\cos\varphi\frac{d\varphi}{dt},$$
$$\frac{dy_s}{dt} = -l\sin\varphi\frac{d\varphi}{dt},$$

$$\frac{d^2x_s}{dt^2} = -r\frac{d^2\varphi}{dt^2} + l\sin\varphi\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 - l\cos\varphi\frac{d^2\varphi}{dt^2}$$

$$\frac{d^2y_s}{dt^2} = -l\cos\varphi\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 - l\sin\varphi\frac{d^2\varphi}{dt^2}. \tag{16}$$

Ebből közvetlenül megkapjuk s és v ismeretlen értékeit φ-nek és differencziálquotienseinek függvényében:



3. ábra.

$$s = -r\frac{d^2\varphi}{dt^2} + l\sin\varphi\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 - l\cos\varphi\frac{d^2\varphi}{dt^2},$$

$$v = g - l\cos\varphi\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 - l\sin\varphi\frac{d^2\varphi}{dt^2}. \tag{17}$$

Ezen értékeket a (14)-ből veendő y_s-sel a (13) alatti utolsó egyenletbe behelyettesítve, megkapjuk azon differencziálegyenletet, mely a mozgást meghatározza. Rendezve

$$(k^2+r^2+l^2+2rl\cos\varphi)\frac{d^2\varphi}{dt^2} - rl\sin\varphi\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 = gl\sin\varphi. \tag{18}$$

Szorozva $2\frac{d\varphi}{dt}$-vel mindkét oldalon, közvetlenül integrálhatunk:

$$(k^2+r^2+l^2+2rl\cos\varphi)\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 = A - 2gl\cos\varphi.$$

Ha a test kezdeti helyzetében $\varphi=\alpha$ s ekkor, kezdősebesség nem lévén, $\frac{d\varphi}{dt}=0$:

$$A = 2gl\cos\alpha,$$

$$(k^2+r^2+l^2+2rl\cos\varphi)\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 = 2gl(\cos\alpha - \cos\varphi) \tag{19}$$

$$\frac{d\varphi}{dt} = \sqrt{\frac{2gl(\cos\alpha - \cos\varphi)}{k^2+r^2+l^2+2rl\cos\varphi}}. \tag{20}$$

A mozgás momentán czentrumának koordinátáit a (9) egyenlet értelmében

$$\xi - x_s = l\sin\varphi,$$

$$\eta - y_s = -r - l\cos\varphi = -y_s$$

egyenletek határozzák meg, vagyis

$$\xi = -r\varphi,$$

$$\eta = 0.$$

A momentán czentrum minden helyzetben a test és a sík lap érintkező pontjába esik. A súlypont távolsága a momentán czentrumtól

$$\rho_s = \sqrt{r^2+l^2+2rl\cos\varphi}. \tag{21}$$

E szerint a (20) egyenlet lesz

$$\frac{d\varphi}{dt} = \sqrt{\frac{2gl(\cos\alpha - \cos\varphi)}{\varkappa^2+\rho_s^2}}. \tag{22}$$

A rendszer eleven ereje

$$\tfrac{1}{2}M(k^2+\rho_s^2)\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 = Mgl(\cos\alpha - \cos\varphi).$$

Ha $y_s^0 = r + l\cos\alpha$, akkor

$$\tfrac{1}{2}M(k^2+\rho_s^2)\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 = Mg(y_s^0 - y_s). \tag{23}$$

a mi azt fejezi ki, hogy a nehézségi erő egész munkája eleven erővé alakul; a surlódás útján energia el nem vész.

A (22) és (23) alatti egyenletek teljesen azonosak azon egyenletekkel, melyek a fizikai inga mozgását meghatározzák, ha ρ_s a súlypont távolsága a forgási tengelytől és k az inga tehetetlenségi sugara. A külömbség csak az, hogy ρ_s az ingánál állandó, a jelen esetben minden helyzetnek megfelelően más.

A mozgás lefolyása ezek szerint a következő:

A $\varphi=\alpha$ helyzetben

$$\frac{d\varphi}{dt}=0,$$

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2}=\frac{gl\sin\alpha}{k^2+\rho_s^2}.$$

Ha $\sin\alpha>0$, vagyis $0<\alpha<\pi$, $\frac{d\varphi}{dt}$ nő 0-tól egy maximális értékig, melyet elér, ha

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2}=\frac{gl\sin\varphi+rl\sin\varphi\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2}{\rho_s^2+k^2}=0, \tag{24}$$

vagyis ha $\sin\varphi=0$, a mi a $\varphi=\pi$ helyzetnek felel meg. Ezután $\frac{d\varphi}{dt}$ kisebbedik, míg $\varphi=2\pi-\alpha$ helyzetben el nem éri a zérust. Ekkor a mozgás iránya megfordul, $\frac{d\varphi}{dt}$ negativ lesz, elér egy legnagyobb negativ értéket, az eredeti $\varphi=\alpha$ helyzetben ismét $\frac{d\varphi}{dt}=0$.

E szerint lengő mozgás jő létre, mialatt φ α és $2\pi-\alpha$ értékek közt változik. Ha tekintetbe veszszük azt, hogy a test a horizontális sík alatt levő térbe nem hatolhat, e lengés csak némely esetben fog bekövetkezni. A geometriai szemlélet mutatja, hogy ha

$$y_s^0>r,$$

akkor minden lehető helyzetben

$$y_s>r,$$

és ha $y_s^0<r$, minden helyzetben $y_s<r$. Vagyis ha $y_s^0>r$, $\cos\alpha>0$, a mozgásnak csak első része jő létre: $\varphi = \frac{\pi}{2}$ helyzetben a test a sík lapra ér s megáll. Ha $y_s^0 < r$, $\cos\alpha < 0$, tényleges lengés fog bekövetkezni.

Mindenesetre lengő mozgás keletkezik, ha kiküszöböljük azt, a mozgásjelenség lényegéhez nem tartozó feltételt, hogy a test nem juthat a horizontális sík lap alatti térbe. Sőt általánosíthatjuk a feladatot úgy, hogy elhagyunk minden oly, a test alakjára vonatkozó feltételt, mely a mozgásegyenletekben kifejezést nem nyer. Elegendő, ha felteszszük, hogy horizontális alapon vertikális körlap gördül és ehhez mereven van kötve egy súlyos tömeg úgy, hogy súlypontja a körlap vertikális síkjába esik. Ily általánosított feltételek mellett — melyek magukba foglalják például a sinre helyezett vasuti kerék esetét is, melynek tömege úgy van elosztva, hogy súlypontja nem a kerék középpontjába esik — a testnek bármely kezdő helyzetét véve fel, lengő mozgás jő létre vagy a test egyensúlyban van. A stabilis egyensúlyi helyzetnek az $\alpha = \pi$, a labilis egyensúlyi helyzetnek az $\alpha = 0$ eset felel meg, míg neutrális helyzetben van az oly test, melynek súlypontja a kör középpontjába esik, vagyis melynél $l = 0$.

8. A test lengési idejét a (20) egyenletből másodszori integrálás adja meg. Egy lengés tartama

$$T = \int_{\alpha}^{2\pi-\alpha} \sqrt{\frac{k^2+l^2+r^2+2lr\cos\varphi}{2gl(\cos\alpha-\cos\varphi)}}\, d\varphi. \tag{25}$$

Ezen integrál alkalmas helyettesítésekkel a harmadfajú elliptikus integrálok normál alakjára hozható.

Először alkalmazzuk a

$$\operatorname{cotg}\frac{\varphi}{2} = -m \operatorname{tg}\psi \tag{26}$$

helyettesitést, hol m egyelőre határozatlan. Ebből

$$\cos\varphi = \frac{m^2\sin^2\psi - \cos^2\psi}{m^2\sin^2\psi + \cos^2\psi},$$

$$d\varphi = \frac{2m d\psi}{m^2 \sin^2 \psi + \cos^2 \psi}; \tag{27}$$

továbbá legyen

$$\operatorname{cotg} \frac{\alpha}{2} = m \operatorname{tg} \psi_0,$$

vagyis

$$\cos \alpha = \frac{m^2 \sin^2 \psi_0 - \cos^2 \psi_0}{m^2 \sin^2 \psi_0 + \cos^2 \psi_0}. \tag{28}$$

Ezen értékeket betéve lesz

$$T = \frac{\sqrt{m^2 \sin^2 \psi_0 + \cos^2 \psi_0}}{\sqrt{gl}} \times$$

$$\int\limits_{-\psi_0}^{+\psi_0} \frac{\sqrt{(k^2+l^2+r^2-2lr)\cos^2\psi + m^2(k^2+l^2+r^2+2lr)\sin^2\psi}}{(m^2\sin^2\psi + \cos^2\psi)\sqrt{\sin^2\psi_0 - \sin^2\psi}}\, d\psi.$$

Ha tehát irunk

$$m^2 = \frac{k^2+l^2+r^2-2lr}{k^2+l^2+r^2+2lr}, \tag{29}$$

akkor

$$T = \sqrt{\frac{k^2+l^2+r^2-2lr}{gl}} \sqrt{m^2 \sin^2 \psi_0 + \cos^2 \psi_0} \times$$

$$\int\limits_{-\psi_0}^{\psi_0} \frac{d\psi}{(m^2 \sin^2 \psi + \cos^2 \psi)\sqrt{\sin^2 \psi_0 - \sin^2 \psi}}.$$

Másodszor alkalmazzuk a

$$\sin \psi = \sin \psi_0 \sin \vartheta \tag{30}$$

helyettesítést, mely szerint

$$\cos^2 \psi = 1 - \sin^2 \psi_0 \sin^2 \vartheta,$$

$$d\psi = \frac{\sin \psi_0 \cos \vartheta}{\sqrt{1 - \sin^2 \psi_0 \sin^2 \vartheta}}\, d\vartheta. \tag{31}$$

Ezen értékekkel

$$T = \sqrt{\frac{k^2+l^2+r^2-2lr}{gl}} \sqrt{1-(1-m^2)\sin^2 \psi_0} \times$$

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\vartheta}{\left(1-(1-m^2)\sin^2\psi_0 \sin^2\vartheta\right)\sqrt{1-\sin^2\psi_0\sin^2\vartheta}}.$$

vagyis, ha

$$\Pi_0(h, k, \varphi) = \int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{(1-h^2\sin^2\varphi)\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}, \tag{32}$$

akkor egy lengés tartama így fejezhető ki

$$T = 2\sqrt{\frac{k^2+l^2+r^2-2lr}{gl}}\,\Delta(\lambda)\,\Pi_0\left(h, k, \frac{\pi}{2}\right), \tag{33}$$

hol az előforduló mennyiségeket

$$h = k\sin\lambda \qquad \cos\lambda = m$$
$$k = \sin\psi_0 \qquad \operatorname{cotg}\psi_0 = m\operatorname{tg}\frac{a}{2} \tag{34}$$
$$m = \sqrt{\frac{k^2+l^2+r^2-2lr}{k^2+l^2+r^2+2lr}}.$$

egyenletek határozzák meg.

Ha r igen kicsiny k és l-hez képest, úgy hogy elhanyagolható, akkor

$$m = 1$$

és a harmadfajú elliptikus integrál elsőfajúvá lesz:

$$T' = 2\sqrt{\frac{k^2+l^2}{gl}}\,F\left(k, \frac{\pi}{2}\right), \tag{35}$$

hol

$$F(k, \varphi) = \int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}$$

és

$$k^2 = \sin^2\psi_0 = \cos^2\frac{a}{2}.$$

E szerint T egyszerűen a közönséges inga $\pi - a$ amplitudóval biró lengésének tartamát adja. Ha l elég nagy r-hez képest, T' elég jól megközelíti T-t.

Az m számértéket, melyet az integrál átalakításánál bevezettünk, némileg annak a mértékéül tekinthetjük, hogy mennyire tér el a mozgás az egyszerű ingamozgástól. Ha visszatérünk a feladat eredeti feltételeihez és a pálcza hengeres részének hosszát L, a henger alapkörének s így a félgömbnek sugarát r betűvel jelezzük, $\frac{L}{r}$ nehány értékére a következő m értékeket nyerjük:

L^{cm}	r^{cm}	l^{cm}	$k^2+l^{2\,cm^2}$	m
0	1	0·375	0·4000	0·550
10	1	4·664	31·5094	0·712
100	1	49·666	3013·2701	0·967
100	0	50·000	3333·3333	1

A lengésidőt tényleg kiszámíthatjuk, ha tekintetbe veszszük, hogy

$$\Pi_0\left(h, k, \frac{\pi}{2}\right) = K + \frac{\operatorname{tg}\lambda}{\Delta(\lambda)}\left[KE(\lambda) - EF(\lambda)\right], \tag{36}$$

hol

$$K = F\left(k, \frac{\pi}{2}\right) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}, \quad F(\lambda) = \int_0^{\lambda} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}$$

$$E = E\left(k, \frac{\pi}{2}\right) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}\, d\varphi, \quad E(\lambda) = \int_0^{\lambda} \sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}\, d\varphi.$$

Ha $L=0$ és $r=1$ cm $a=180°-30°$ $\psi_0=25°56'$ $\lambda=56°39'$
$L=100$ cm $r=1$ cm $a=30°$ $\psi_0=74°31'$ $\lambda=14°38'$
$L=100$ cm $r=0$ $a=30°$ $\psi_0=75°$ $\lambda=0$,

hol e mennyiségek a

$$\cotg \psi_0 = m \operatorname{tg} \frac{a}{2},$$
$$\cos \lambda = m$$

egyenletekből vannak meghatározva. Az utolsó eset megfelel a másodiknak, ha r-et L mellett elhanyagoljuk. A lengésidők a két első példában

$$T = 0{\cdot}161 \text{ sec},$$
$$T = 1{\cdot}433 \text{ sec},$$

és a harmadik esetben, mely a második közelítő számításaként tekinthető

$$T' = 1{\cdot}378 \text{ sec}.$$

Ugyanily közelítéssel, az esés-idő, vagyis azon t idő, mely alatt a pálcza $\varphi = 90°$ helyzetbe jut,

$$t = 0{\cdot}449 \text{ sec}.$$

9. Nem lesz tán érdektelen megkeresni a pálcza azon pontját, mely úgy mozog, mintha anyagi pont lenne, melyben a pálcza egész tömegét konczentrálva képzeljük és mely ugyanazon pályát kényszerül leirni, mint a melyet a merev rendszerrel együtt leír. Ily pontot mindig meg tudunk határozni a gömb középpontját a súlyponttal összekötő egyenesen. Ha az illető pont távolsága a gömb középpontjától l', mindenesetre áll, hogy sebessége

$$v^2 = \varrho^2 \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2, \tag{37}$$

hol

$$\rho^2 = l'^2 + r^2 + 2rl' \cos \varphi, \tag{38}$$

vagyis ρ a pont távolsága a momentán czentrumtól.

Másrészt ha az egész M tömeg ebben a pontban van konczentrálva

$$\tfrac{1}{2} M v^2 = Mg\,(l' \cos a - l' \cos \varphi), \tag{39}$$

azaz

$$\tfrac{1}{2} M (l'^2 + r^2 + 2rl' \cos \varphi) \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 = Mgl' (\cos a - \cos \varphi).$$

De

$$\tfrac{1}{2} M (k^2 + l^2 + r^2 + 2rl \cos \varphi) \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 = Mgl (\cos a - \cos \varphi), \tag{40}$$

vagyis ha P' pont azon tulajdonsággal bir, hogy sebessége ugyanaz minden pillanatban, akár a merev rendszerhez tartozik, akár mint anyagi pont mozog ugyanazon pályán, kell hogy

$$\frac{l'^2+r^2+2l'r\cos\varphi}{k^2+l^2+r^2+2lr\cos\varphi}=\frac{l'}{l}$$

egyenlőség fennálljon. Rendezve lesz

$$\frac{r^2+l'^2}{l'}=\frac{k^2+r^2+l^2}{l}, \tag{41}$$

a mivel l' meg van határozva. Mindkét oldalhoz $2r$-et hozzáadva

$$\frac{r^2+l'^2+2rl'}{l'}=\frac{k^2+r^2+l^2+2rl}{l} \tag{42}$$

és $-2r$-et hozzáadva mindkét oldalhoz

$$\frac{k^2+l^2+r^2-2lr}{l}=\frac{l'^2+r^2-2l'r}{l'}, \tag{43}$$

tehát

$$\frac{(l'-r)^2}{(l'+r)^2}=\frac{k^2+l^2+r^2-2lr}{k^2+l^2+r^2+2lr}=m^2. \tag{44}$$

E szerint ha

$$m=\left(\frac{k^2+l^2+r^2-2lr}{k^2+l^2+r^2+2lr}\right)^{\frac{1}{2}},$$

irhatunk

$$l_1'=r\frac{1-m}{1+m}$$

$$l_2'=r\frac{1+m}{1-m}. \tag{45}$$

A két egyenletet szorzata ad

$$l_1'l_2'=r^2,$$

és összeadva

$$l_1'+l_2'=\frac{k^2+r^2+l^2}{l}, \tag{46}$$

a miből l' könnyen szerkeszthető. l' egyik értéke nagyobb, a másik kisebb mint r. *Kármán Tivadar.*

A SÁROSPATAKI FŐISKOLA FIZIKAI MUZEUMA A XVIII. SZÁZAD VÉGÉN.

(Első közlemény.)

E lapok mult évi VII. sz. füzete Fináczy Ernő közlése nyomán Szekeres Kálmán forditásában bemutatta a nagyszombati tudomány-egyetem fizikai gyűjteménye ama részének névjegyzékét, mely ennek a gyűjteménynek törzsét képezte, s a melynek — mert ez az egyetem Budára helyeztetett át, — a budai egyetemre való átszállitása annak idején szükségesnek látszott.

A sárospataki főiskola fizikai gyűjteményének a Fináczy-Szekeres-féle lajstrommal egyidős leltárát mutatom be az alábbiakban — az egybehasonlithatás mellett — abból a czélból is, hogy a hazai fizika és művelődés-történettel foglalkozóknak némi tájékozást s adatokat is szolgáltassak hazánk eme nagy multú vidéki tanintézetének akkori culturalis állapota felől.

A fizika történetéből tudjuk, hogy ezt a tudományszakot Galilei előtt s hazánkban ő utána majdnem két évszázadon keresztül a bölcsészettel kapcsolatban tanitották, melynek aristotelesi osztályozása szerint a fizika a filozofiának egyik ágát képezte. Igen természetes tehát, hogy hazánk ama főiskoláin, melyeknek tanitási köre a bölcsészetre kiterjedt, a fizikát is eo ipso tanitani kellett. Ez a természetes magyarázata annak, hogy a sárospataki főiskolának már a XVIII. század első évtizedében fizikai muzeuma van.

A szóban lévő leltár czimlapja ez: *Protocollum Musei Physici Ill. Collegii Reformatorum S. Patakiensis. Inchoatum per me Martinum Szilágyi Philos. et Math. Prof. P. Ao. 1774 et succesive Annis sequ. continuatum. — Continuatum et auctum per me DavidemSzabó de Bartzaffalva Mathes. et Physic. Prof. P. O. ab Anno*

1791. (A reformátusok sárospataki híres kollégiuma fizikai muzeumának leltára. Vezetését megkezdte 1774-ben s a következő években folytatta Szilágyi Márton, a bölcsészet és mathesis nyilvános tanára. — 1791-től folytatta s gyarapította Barczafalvi Szabó Dávid, a mathesis és a fizika nyilvános, rendes tanára.)*

A leltár tartalma a következő:

Series Instrumentorum Physicorum et Mathematicorum I. Collegii S. N. Patakiensis secundum Partes Scientiae Naturalis et Mathematicae digesta.

NB. b. Instrtta, quæ ego comparavi, Asterisco notata sunt, quæ vero hoc signo carent, jam ao. 1773, quo huc veni, præextiterunt.

Instrumenta Geometrica.

1. Astrolabium in Capsula rubra coriacea, cui accedunt: a. 4 Dioptrae æneæ longiores. b. Stativum simplex et unipes c.* Stativum tripes.

2.*Catena Metatoria.

3. Capsula Mathematica nigra coriacea, in qua sunt: 2 cir-

A sárospataki hires kollegium fizikai és mennyiségtani eszközeinek jegyzéke a természettani és mennyiségtani tudományok részei szerint rendezve.

Megjegyzendő, hogy azok az eszközök, melyeket magam szereztem, csillaggal vannak megkülönböztetve; a melyek mellől azonban ez a jel hiányzik, már 1773-ban, idejövetelem idejében megvoltak.

Mértani eszközök.

1. Astrolabium, melyhez tartozik: a. négy rézből való hosszabb irányzó, 2. egyszerű, egylábú állvány, c.* háromlábú állvány.

2.*Mérő lánc.

3. Mennyiségtani szekrény, a melyben van: két körző, 1 szögmérő,

* Ugyanazon a tanszéken egymást követő két tanár működési körét feltüntető jelzők világosan bizonyítják, hogy Szilágyi a fizikát még a bölcsészet körében, Barczafalvi azonban már önálló tárgyként tanítja.

cini, 1 transportatorium, 1 norma, quæ cum adjecto pondusculo æneo etiam libellæ vicem præstat, 1 calamus delineatorius, 1 forceps æneus, cui cerussa inseritur.

4.*Capsula Mathematica corio rubro inducta, in qua sunt 3 circini, transportatorium, scala geometrica, 2 calami delineatorii, 1 forceps æneus.

5. Mensula Prætoriana cum stativo tripode, antiqua.

6. Pantographum Kircherianum, æque vetus et ad exactam operationem ineptum.

7.*Baculi Metatorii 5, cuspidibus ferreis muniti, ex dono Nob Dni. Nicolaus Vay de Vaja.

8.*Retia Corporum Regularium : tetraedri, octaedri, hexaedri, dodekaedri, et icosaedri, item prismatis triangularis et pyramidis rectangulæ.

9.*Mensula Delineatoria cum regula.

10. Tubus æneus Libellatorius cum dioptris 2 et stativa tripode.

11. Libella tubo instructa telescopico, splendida, pro demonst. p. mensul. prætor.

12. Instrumentum majus æneo semicirculo et pendulo instructum.

13. Libella minor pensilis, manualis.

1 olyan szögmérő linea, a mely egy kis rézsúly rátevésével libellának használható, 1 rajztoll, 1 rézfogó, melybe ceruza tehető.

4.*Ugyanaz, hasonló alkatrészekkel.

5. Mérnöki asztal, három lábú állványnyal, ócska.

6. Kircher-féle másoló eszköz, szintén régi.

7.*Öt drb. vasas végű mérnöki rúd, vajai Vay Miklós adományából.

8.*A szabályos testeknek, továbbá a három oldalú hasábnak és a derékszögű piramisnak mintái.

9.*Mérnöki asztal irányzóval.

10. Libella rézből, két irányzóval, háromlábú állványon.

11. Távcsővel felszerelt, kiváló libella a mérnöki asztalhoz.

12. Hasonló, nagyobb eszköz fémből való félkörrel és irányzóval.

13. Kisebb, függő kézi libella.

14. Indices 2, ad pedes et digit. Vienn. divisæ cum tabella mobili.

15. Capsula cum circinis pro delin, circulorum radiis majoribus.

16. Semicirculus ligneus chordis binis ad ang. rectos distinctus.

17. Pantographum a Voigtländer fabricatum.

18. Tabula nigra.

19. Instrum. æneum trigonometricum pro inveniendis Sinibus.

20. Nautica pixis ad libellam.

21. Major in capsula lignea.

22. Communis minor ænea.

23. Cubus æneus capsula inclusus.

Instrumenta Mechanica.

1. Vectus simplex rectus et incurvus.
2. Vectus compositus, e 3 vectibus constans.
3. Trochleæ acneæ simplices No. 7.

14. Két mérő lécz, bécsi lábakra és hüvelyekre osztva, mozgatható táblával.

15. Szekrény, nagyobb sugarú körök rajzolására alkalmas körzőkkel.

16. Félkör fából, két-két húrral derékszögekre osztva.

17. Voigländer-féle pantográf.

18. Fekete tábla.

19. Réz-eszköz a szögek sinusainak meghatározására.

20. Szélrózsa a libellához.

21. Hasonló nagyobb készülék fatokban.

22. Kisebb ily eszköz fémből.

23. Fémkoczka szekrényben.

Mechanikai eszközök.

1. Egyszerü, egyenes és szögemeltyű.
2. Összetett emeltyű, háromból összetéve.
3. Hét egyszerű csiga sárgarézből.

4. Hexaspasti triplices, omnes æneí.

5.*Pondera plumbea 1, 2, 3, 4, 5, 6 librarum, similiter 1/2, 2, 3 . . . unciarum, quæ ego ipse e rudi plumbo confeci.

6. Cochlea infinita.

7. Planum inclinatum.

8. Mensula ad effectum virium compositarum demonstrandum.

9. Axis in Peritrochio.

10. Hircus Belidorii.

11. Statera Londinensis in capsula nigra.

12. Jugum bilancis utrinquæ in 100 partes divisum; abs. ullis lancibus.

13.*Jugum bilancis vulgaris, itidem absque lancibus.

14. Machina ad dstrdum lapsum corpor. 'e Cycloide.

15. Machina alia per quam motus in Cycloide cum motu per planum inclinatum confertur.

16. Plana ænea, quæ sibi invicem apposita firmissime cohærent.

17. Elateriometrum.

4. Csigasor, hat rézcsigával.

5.*1—6 fontos, továbbá 1/2, 2, 3 . . . unciás súlyok. Magam készítettem nyers ólomból.

6. Végtelen csavar.

7. Lejtő.

8. Erők összetételének kimutatására szolgáló készülék.

9. Hengerkerék.

10. Belidor-féle kos.

11. Londoni mérleg.

12. Mérleg-rúd, mindkét oldalon 100 részre osztva, csészék nélkül.

13.*Közönséges mérleg-rúd, ugyancsak csészék nélkül.

14. A cykloison való mozgás feltüntetésére szolgáló eszköz.

15. Másik készülék, melylyel a cycloison és a lejtőn való mozgás összehasonlítható.

16. Tapadó lemezek.

17. Magasságmérő (libella).

18. Pondera ænea uncialia ansa et hamo instructa.

19. Horologium ligneum.

20. Globi marmorei No. 7.

21. Pondus parallelepipedale pro firmandis in loco instrumentis.

Instrumenta Hydrostatica.

1.*Fons Heronis. N. b. Hæc Machina ptt. etiam inter Aerametricas referri.

2. Follis Hydrostatica.

3. Pyxis Hydrostatica, cui accedunt: *a)* cylinder e laminis ferri confectus, *b)* e simili materia fabrefactus conus tumeatus *c)* tubus cupreus cum cisterna cylindrica ferrea, *d)* tubus cupreus longior et gracilior, cum cisterna ænea cylindrica. N. b. Ex his apparatibus Pyxidi omnes possunt successive applicari.

4. Parallelepipedum ligneum, cavum, intus rubro, extus cœruleo colore tinctum. N. b. Huic in Experinto. applicatur pyxis remotis pedibus.

5. Bilanx hydrostatica cum ponduscu̇lis æneis, in capsula lignea, alba. N. b. Adsunt in ædem capsula lances quoq. minores æneæ No. 7.

18. Unciányi tömegű rézsúlyok, horoggal és fogantyúval.

19. Óramű fából.

20. Hét márványgolyó.

21. Tégla alakú súly az eszközöknek egy helyen való megerősítésére.

Hydrostaticai eszközök.

1. Heró kútja. Az ærometricai eszközök közt is felemlíthető.

2. Hydrostaticai fújtató.

3. Hydrostaticai szekrény, melyhez tartozik: *a)* vas-cylinder, *b)* csonka kúp vasból, *c)* rézcső, hengeres vas-víztartóval, *d)* hosszabb és csinosabb rézcső, hengeres réz-víztartóval. Megjegyzendő, hogy ezek az eszközök sorjában valamennyien a szekrényre alkalmazhatók.

4. Üres fa-parallelepipodon. Erre helyeztetik el kisérlet alatt a szekrény lecsavart lábakkal.

5. Hydrostaticai mérleg, rézsúlyokkal, fa-szekrényben. A szekrényben 7 kisebb rézserpenyő is van.

6. Tantalus potans.

7. Phiola, qua permutatio aquæ in vinum producitur.

8.*Libellæ vitreæ duæ, rubro liquore repletæ.

9.*Siphones vitrei, ad dstrandum situm horizontalem aquæ quiescentis.

10.*Stativum hydrostaticum, quod per cochleam suam ad mensam firmari, dequ. tum bilanx appendi, tum trochleæ in Exprttis Mechanicis suspendi possunt.

11.*Areiometra vitrea No. 2.

12. Apparatus ad bilancem hydrost, in peculiari capsula, in qua continentur ea, quæ Gravesandius habet iconibus expressa.

6. Tantalus pohara.

7. Csésze, melylyel a víznek borrá változtatása produkáltatik.

8.*Két üveg-libella, veres folyadékkal töltve.

9.*Üveg-szivornyák, a nyugvó vízfelület horizontalis állásának kimutatására.

10. Hydrostaticai állvány, mely csavarjával az asztalhoz erősíthető, reá két serpenyő s mechanicai kisérletek alatt csigák függeszthetők.

11. Két üveg-areometer.

12. Készülék a hydrostaticai mérleghez, értékes szekrényben, melyben a Gravesande-féle eszközök vannak.

Közli: *Ellend József.*

A LEVEGŐ IONIZÁLT VOLTA.

A szabad levegőben szigetelten elhelyezett vezető test elektromos töltését idővel elveszti: e tüneményt, az elektromos szétszóródást már sokan, maga Coulomb, az elektromos mérések megteremtője is, vizsgálták. Újabban Elster és Geitel* tettek ily irányú kisérleteket és eredményeik a levegő elektromos állapotának új felfogására vezették őket.

Az általános nézet, hogy a száraz, tiszta levegő szigetelő lévén, a levegőben kitett elektromos test töltését azon porszemek és vízcseppek vezetik el, a melyek a testtel érintkezésbe jutnak és azután ellöketnek, Elster és Geitel kisérletei szerint kétségkivül téves. Mert minél ködösebb és tisztátalanabb levegőben végezték kisérleteiket, annál kisebb volt az elektromos szétszóródás. És ez mindig bekövetkezett, akár szélcsendben, akár viharos szélben végezték kisérleteiket, tehát akár több, akár kevesebb porszem vagy vízcsepp jött a kitett vezetővel az időegység alatt érintkezésbe. Ekközben úgy találták, hogy nem nagy a különbség, akár positiv, akár negativ töltésű vezetőről történik a szétszóródás. Mint átlagos értéket, igazolták Linss régebbi kisérleteiből** kiadódó szétszóródás sebességet, mely szerint a test töltését szétszóródás útján már 100 percz alatt elveszti.

A szétszóródás a tengerszin feletti magassággal növekedik, még pedig positiv és negativ töltésekre körülbelül egyformán. Ezen eredményt azonban csak akkor találták, ha síkföldön végezték kisérleteiket. De nevezetes különbség mutatkozik positiv és

* Terrestrial Magnetism. 1899. Dec. pag. 213.

** Meteorol. Zeitschrift 1887. pag. 345.

negativ töltésű test szétszórása közt, ha egy hegycsúcsra megyünk. Itt mindig a negativ töltésű test sokkal gyorsabban veszti töltését, mint a positiv, a viszonyt a Säntis csúcson körülbelül 4·0-nak találták. — Kiindulva Lénárd ama felfedezéséből, hogy a vizesések közelében a levegő negativnek mutatkozik, azt várták, hogy ily helyen a positiv töltésű test gyorsabban fogja elveszteni töltését. E várakozásuk teljesedett is: a viszonyt positiv és negativ töltésű test szétszóródása közt körülbelül 8·5-nek találták egy Zermattvölgyi vizesés közelében.

Nagyszámú ilynemű és laboratoriumi kisérletre támaszkodva, Elster és Geitel a levegőre is alkalmazzák a gázok elektromos vezetésének ión elméletét. Tudjuk, hogy a levegő bizonyos hatások alatt [lángok, Röntgen- és Becquerel sugarak] vezetővé válik, a mit Elster és Geitel így fejeznek ki, hogy iónizálható, azaz a közönséges állapotban nem vezető száraz és tiszta levegő ily hatások alatt positiv és negativ töltésű ionokra bomlik. Hogy a szabad levegőben mily ok hozza létre főkép [mert valószinű, hogy több ok játszik közre] az iónizálást, az egyelőre nyilt kérdés marad. — Minthogy tudjuk, hogy a Föld negativ töltést mutat, kétségtelen, hogy hegycsúcsokon, a hol az elektromos sűrűség nagy, a levegő positiv iónjai vonzatnak főkép a talaj felé, az alacsonyabb légrétegekben tehát több lesz a positiv, mint a negativ ión: itt tehát egy negativ töltésű test gyorsabban veszti el töltését, mint egy positiv töltésű. Ellenkező esetnek kell beállnia vizesések közelében, a hol Lénárd kisérletei szerint a negativ iónok vannak túlysúlyban. — Könnyen érthető továbbá, hogy ködös időben, midőn az iónok vizcseppecskékkel egyesülhetnek, ezen egyesülés maga után vonja az iónoknak a megnövekedett tömeggel együttjáró kisebb sebességét, a minek természetes következménye a szétszóródás lassúbb volta.

E gondolatmenet alapján Elster és Geitel a csapadék elektromos állapotának vizsgálata közben régebben nyert eredményeiket természetes úton meg tudják magyarázni. A tapasztalat azt mutatja, hogy negativ iónokkal telt és vizgőzt tartalmazó levegőben expandálás következtében beálló lehülés folytán előbb mutatkozik a vízpáráknak cseppekké sürűsödése, mint a positiv elektromosságú levegőben. Ebből már most következik, hogy ha oly levegőben, a mely positiv és negativ iónokat tartalmaz, kondenzáczió áll be, előbb a negativ iónok váltak vízcseppek hordozóivá és csak további lehülés folyamán a positiv iónok is. Ebből az következik, hogy egy felhőből eleinte a negativ iónok válnak ki a vízcseppekkel és csak később esetleg a positivek is, ha ugyan a negativ iónok útján meg nem szabadult már a felhő vízpáratartalmától, a mikor positiv iónokkal telt száraz levegő marad a felhő helyén. Igy meg lehet magyarázni a csapadékok [eső, hó, jég] elektromos állapotára nyert tapasztalatokat. — De a zivatar alkalmával fellépő nagy feszültségek is ily módon magyarázhatók, t. i. addig, a míg a negativ és positiv iónok a felhőben vannak, kifelé nem hatnak. Mihelyt azonban a negativ iónok a vízcseppekkel kihullnak, potentiálkülönbség lép fel a kiváló negativ iónok esése közben végzett munka árán.

A levegő iónizált voltának felvétele magára a légköri elektromosság eredetére és a légköri elektromosság sok tüneményének magyarázatára nyújt támpontokat. Elster és Geitel segítségül veszik Thomson és Zeleny azon tapasztalatait, hogy a negativ iónok sebessége nagyobb, mint a positiv iónoké, úgy, hogy — miként azt Zeleny kisérletileg is bebizonyította — egy elszigetelt test a szabad levegőben magára hagyva negativ elektromos töltést nyer; e töltés addig növekedik, a míg e töltéstől származó elektromos mezőben a positiv iónokra gyakorolt vonzás, illetve a negativekre gyakorolt taszítás a negativ iónok sebességtöbbletét kompenzálja. Az iónizált levegőben tehát a Föld is negativ töltést nyer, a mint azt a tapasztalat is bizonyítja; a szabad levegőben pedig positiv iónok vannak túlsúlyban, különösen az alsóbb rétegekben. Ekként a légköri elektromosság alaptüneményei: a Föld negativ elektromossága és a levegőben levő positiv elektromos tömegek, természetes úton magyarázódnak. A légkör különböző rétegeiben tapasztalható potencziálkülönbségek napi és évi periódusa, ezen iónelmélet értelmében a levegő páratartalmával magyarázandó t. i. azon hatással, a melyet pára- és ködképződés az iónok sebességére gyakorol. Hogy a páratartalommal az évi periodus összefüggésben van, azt Exner elmélete is követeli, a mely szerint a Földről felszálló vizpárák negativ töltést visznek magukkal. Tudjuk azonban, hogy Exner elmélete ép a legutóbbi időkben, ballonokban tett észleletek folytán, a melyek a potencziálváltozásnak csökkenését mutatták ki a magassággal — ép ellenkezőleg, mint azt Exner elmélete követeli — vesztett hiteléből. Hogy mind a két elmélet a potencziálváltozásnak periodusait a levegő páratartalmára vezeti vissza, az a két elmélet egy külső és csak látszólagos rokonsága.

Az iónelmélet, a mely a sugárzási tünemények magyarázatánál már számos esetben bizonyult hasznosnak és olyan hypothezisnek, a mely a vizsgálatokra termékenyitőleg hatott, a levegőre alkalmazva, a légköri elektromosság tanában is haladást jelent a régebbi felfogásokkal szemben.

Steiner Lajos.

VEGYESEK.

Látogatás Gaussnál.

Naplótöredék.*

Göttingen, september 1-én, 1843.

Ugy hiszem, minden utazónak, ki tapasztalás és ismeret gyarapítás végett a' külföldet megkeresi, az ily utazással együttjáró kedves foglalatosságok — 's hogy ugy szóljak kötelességek — között, minők egyesületek, intézetek figyelmes megtekintése, népjellem-miveltségi fokozatra ügyelés 'stb. 'stb. van egy, mellyben ha nem is mindenkor a' legdusabb haszon eredményével, mindazonáltal a' legnagyobb örömmel szeret eljárni. Igy például egyik szinházak látogatásában, másik mügyüjtemények szemlélhetésében, egy harmadik meglehet kisdedóvókban az ártatlan gyermekek közt fogja legnagyobb örömét találni; holott külön külön mindenik elismeri, mikép a' nevelő intézetek-, tanulási módszer-, ipar 's kereskedelmi tárgyak- 's minden a' közjólétet előmozditó intézményekkeli ismerkedésben sokkal több saját 's a' honi állapotokra is szétárasztható haszon van elrejtve. Részemről megvallhatom mikép van illy mások feletti kedves köte-

---

* E czikk, mely «*Naplótöredékek. IV.*» czimen a «*Nemzeti Társalkodó*» 1844 aug. 30-iki számában jelent meg először, annyiban történeti érdekű, hogy Bolyai Farkas belőle értesült Lobatschefskij Miklósnak geometriai kutatásairól. De az orosz tudós nevét és a «*Geometrische Untersuchungen zur Theorie der Parallelinien*» czimét csak 1848-ban tudta meg Gausstól.

A naplótöredék szerzője Mentovich Ferencz, költő és a tudományok népszerűsítésén fáradozó író, szül. 1819 ápril 19-én Szolnok-Doboka vármegye Nagy-Debrek községében, meghalt 1879 decz. 15-én Marosvásárhelyt, hol 23 éven át töltötte be ugyanazt a tanszéket, melyről Bolyai Farkas 1851-ben nyugalomba vonult. Miután Berlinben másfél éven át hallgatta Dove, Magnus, Ohm, Mitscherlich és a két Rose előadásait, 1843-ban Hamburg, Helgoland és Göttingán keresztül jött haza és a következő évben az említett lapban e helyek mindegyikéről egy-egy naplótöredéket közölt.

Kürschák.

lességem; megvallhatom mikép a' kitünőbb szellemü emberekkel ismerkedni, vagy legalább kieszközölni hogy őket élő szemeimmel láthassam — mindenek felett kedvencz foglalatosságom. Ha van valami érdekes abban, hogy valamelly folyót eredetéhez felkisértünk; ha az Europa érdekesb részeit, vagy a' hon földét aprόra bejárt utas vándorutja azon pontjait számlálván elő, mellyekre legörvendőbben emlékezik — nem felejti kihagyni: voltam a' Duna 'stb. eredeténél, láttam a' Tisza a' Maros legelsö forrásait: mennyivel nem érdekesebb olly kútfőket keresni fel, honnan világosság sugárai burogtak fel, 's áradtak szét a' földön; mennyivel nem érdekesebb mondhatni: voltam azon forrásnál, honnan eszmék 's gondolatok terjedtek el az emberiség boldogitásá- és nemesitésére. Egy illyenek arczvonásai híven lelkembe rajzolódnak 's a' hűn talált képet felfüggesztem képtárombam: *emlékezetem csarnokába.*

E' képgyüjteményt meglehet, sokan valami sajátságosnak fogják találni, mindazáltal hiszem, miszerint azon nem lehet ollyszerü különczség nyomait észrevenni, minő azon angol gyüjteményén mutatkozott, kiről azt mondják hogy a' nagy emberek *körömdarabjait* szerette magának emlékül meggyüjtögetni.

Képcsarnokom nem számlál még olly sok darabot, mennyi teszem a' dresdeni, vagy berlini museumban látható; mindazonáltal néhány kitünő és sokért nem adott példánynyal dicsekedhetik; ugy hogy ha pénzzé akarnám gyüjteményem tenni, valóban nem kevés gazdagságra tehetnék szert. Igy például egy irodalmunkat forrón ölelő erdélyi hölgy, kinek házi körülményei miatt kevés reménye lehet Pestet valaha láthatni, mennyit nem adna Vörösmartynk képeért. Egy lelkes természettudomány-kedvelőről, ki ismeri a' természettudományok ujabb időben tett előhaladását, 's ismeri névről azon szellemeket is, kik előbbvitelökre olly hatalmasan befolytak — menynyit nem kapnék a' Humboldt mellképeért! . . . Igy tovább eladhatnám gyüjteményemből müvészet-kedvelő honfitársaimnak Meyerbeer, Liszt, Cornelius, Rauch, valamelly lelkes szinésznek Seiydelmann arczképeit 'stb. Azonban hadd maradjanak meg gyüjteményemben: egy keresztülpillantás a' szellemdus, kifejezésteljes arczokon olly kedves hatásu, annyira lélekemelő.

Göttingenben egy jeles példánynyal vala kész gyüjteményem szaporodandó. Nyugtalanul vártam a' látogatásra alkalmas időt, mi csakugyan megérkezvén azonnal sieték Gauss-t meglátogatni.

Gauss nevét mindenkinek ismernie kell, ki csak a' mathesist elemeinél tovább tanulta, ismeri azt minden avatottabb csillagász, ismeri minden természettanász (Physiker), ki a' föld deléji (magnetisch) erejének az ujabb időben tett előhaladási lépéseit figyelemmel kisérte. A' tudományosság évkönyveibe szelleme örök betükkel jegyezte fel magát.

A' tisztes ősz szivesen fogadott. Nekem csak egy pillanat kellett — még négy másod perczny idő sem, mennyi egy daguerre-féle kép elkészülésére szükséges — 's a' derék öreg képe, ősz haja 's nemes arczvonalmival képcsarnokomban fel lőn függesztve.

Miután tudatám vele, hogy erdélyi vagyok, csak hamar élénk részvéttel kérdezé: ha valljon erdélyi jó barátjáról professor Bolyairól nem tudnék-e valami ujabb tudósitást mondani egy őt előttem nem sok idővel meglátogatott erdélyi hazámfiánál professor Szásznál?: Mire válaszul adám: hogy csak óbbakkal szolgálhatok, minthogy már harmadfél éve lesz hogy hazul eljöttem. És ezen a' megkezdett tárgyróli beszélgetésünknek éppen nem megnyujtására szolgált feleletem után sem vala befejezve Bolyaink feletti szóváltásunk; látszott rajta miszerint kedvencz tárgyán állapodott meg, miről a' beszédben nem olly könnyen szeretünk eltérni. «Magamhoz hasonlóan mint megőszült 's megöregedhetett az én barátom; valóban ha még egyszer találkozhatnám vele, nem kis örömnek juttatna birtokába, mert az ember késő öregségben — midőn jó barátai és ismerősei mellőle apránként kidőlnek — megnövekedett hévvel ragaszkodik még fennmaradt kevés jóembereihez.» Igy sohajta fel a' tudós, 's látszott egész külsőjén egy rövid ideig tartó elmerengés az ifjukor együtt-töltött napjaira. Majd felvidámodva felkele ülőhelyéről, s egy még egészen uj külsejü könyvet vona elő, melyről azt mondá, hogy nem régiben vevé egy orosz mathematikustól 's előtte azért érdekes, mert nézeteiben merőben egyezik a' Bolyaiak mathesis körüli önállóbb nézeteikkel; holott meg van győződve, miszerint — mint olly egymástól messze fekvő tartományok lakói — a' legkisebbet sem tud egyik a' másikról 's eszméiket nem cserélhették egymással ki. E' munka — folytatá tovább — megérdemli a figyelmet; 's magyarnak a' csodálatos nézetrokonságért kétszeresen érdekes 's könnyen hozzá jutható lehet, mert orosz nyelven van irva. Ezen nyilatkozatából ugy látszik Gauss is — mind a' mellett hogy magyar barátja van — azon felette tévedt véleményben van — mi egyébbiránt általános meggyőződés a' németországi nem philologus tudósoknál – miszerint a' magyarnyelv, mint a' lengyel, tót, cseh 'stb. egy rokon ága a szláv nyelvtörzsöknek; melly tudatlanság valóban megbocsáthatlan a' mindentudást igénylő német tudósoknál. Láttam Bolyaink mathematikai munkáját dolgozó asztala melletti kisded könyvtárában, hová ugy látszott kedveltebb iróktóli 's inkább kézi könyvül használni szokott müvek valának beszoritva. E' jeles férfiu minden szavából kitetszett, miként Bolyainkat nemcsak mint barátját — tiszteli, de tudományos érdemeit is sokra méltatja. Miután bucsuzám, meghagyá üdvözölném nevében öreg barátját, 's mondanám meg miszerint nagy örömére leendne, ha jelen állapotja felől egy legujabb és legbiztosabb alkalom által: saját levelében értesitetnék. Ezt én megigértem.

Edes örömet vive magammal hagyám el a' nagy tudóst, mert abból hogy Bolyaink munkája kedvencz könyvei sorában diszlik, 's tudomány körüli fáradozása annyira méltányoltatik — *kárpótlást és biztositást* meritek magamnak. Kárpótlást azon boszankodásom helyébe, miszerint honi mathematicusaink által a' Bolyai nevet még egyszer sem olvashatám méltányolva megemliteni. Biztositást az iránt, hogy majd midőn a' tudományosság erősb alapot vervén magának a' magyar földön is, mathesisban is önállóságra verekedendünk — az ezután születendő magyar Euler-ek és Lagrange-ok előtt Bolyaink neve édesebb hangzásu leend 's e' név fogja megkezdeni a' tudomány lajstromában a' *valódi* magyar mathematicusok névsorát.

De a' rövid idő alatt, mit Gaussnál töltöttem, egyébb is vala beszélgetésünk tárgya, mi a' két magyarhaza természettudósait közelről, 's tán *elevenen* érdekelheti.

Kérdezősködvén azon vizsgálatok felől, mellyek évenkint Göttingenben Gauss vezetése alatt a' föld deléji ereje körül tétetnek, élénk lelkesedéssel beszélt azon részvétről, melly messze földön el van terjedve ezen eddigelő az emberi szem előtt elrejtve volt természeti erő kikutatása iránt. Az egész föld — ugy monda ő — be van hálozva vizsgálattételekkel. A' legtávolabb helységekben is, minők a' Jóremény-foka, Madras, Nertschinks, Trivandrum 'stb. e' végre observatoriumok vannak felállitva, 's a' vizsgálat eredményei évenként összehasonlitás végett — közöltetnek; csupán Europa délkeleti részeiből nem kaphatni semmi adatokat e' tárgy körül — 's itt sajnálkozását fejezé ki — hová tartozik Magyarország és Erdély is. 'S ez az, mi természettudósainkat közelről érdekelheti.

Én megvallom ha politicussal jövök ismeretségbe, ohajtom hogy hazám beszédtárgygyá váljék, mert e' mezőn nem mondhatjuk magunkat olly hátra állóknak. Sőt e' tekintetben a' külföld figyelmét is annyira magunkra vontuk, hogy mielőtt magam beszélnék uj ismerősömmel előhaladási lépésünkről, többire az idegen kezd belé, részvéttel beszél azon világos és józan szellemről, melly politicai intézkedéseinket átlengi. Meglepők, 's még az angol parlamentben is számot tennének — ugy mondta egy politicus utazó, kivel Hannoverben ismerkedém meg, — azon éles belátás és elmeszikrák, mellyek a' nagyobb testvérhon országgyülésén egymást üzve fel-villannak. Éppen igy ha költővel ismerkedem meg, egy kis büszkeséggel hozom szőnyegre költészetünket, örömtől átsugárzott büszkeséggel beszélek néhány jeleseinkről. Azonban tudós- és pedig természettudóssal átellenben büszkeségem meghunyászkodik, mert illy alkalommal mindig valami panasz, valami vádszerüre kell elkészülve lennem. A' geognosta például fájlalva mondja hogy mi majd mit sem tevénk szép országunk földje geognosiai szempontbóli ismertetésére. Ott áll a' roppant kiterjedésü föld 's csupán néhány bányászpontjai ismeretesek valamennyire, egyébütt mindenütt sötétség boritja. A' füvész hasonlag szemünkre veti, mikép nem nekünk való azon gazdagság, melly Magyarország florája és vegetátiójában elterjed. A' természettanász — hogy többet ne hozzak fel — panaszol, mikép a két magyarhazából semmi meteorologiai adatokat nem kaphatni, 's mint fölebb láttuk sajnálva mondja, mikép a föld magnetismusa — melly iránt a földgömb minden részeiben élénk figyelem terjedt el — a' két magyarhazában senkit sem érdekel. 'S ezen panaszok és szemrehányások annyira igazak, mikép lehetlen azokat egyébként szeliditeni mint egy kis reményadás, egy kis biztatással hogy e tekintetben is kevés idő alatt máskép álland a' dolog.

'S valljon ezen biztatás mikor valósuland? A kevés idő alatt hány évek számát kell tulajdonképen értenünk? Ha a' valódibb tudományok iránt eddig növekedett közszeretetből akarunk itéletet hozni, ugy évtizedeket foglal magában. Azonban csakugyan okunk is van hinni, mikép ezen közrészvét ezután sebesebb léptekkel fog növekedni, és valóban ideje is hogy növekedjék.

Az összes tudományosság közkincstára az emberiségnek, miből mindenki tetszése szerint gazdálkodhatik, 's ez annyival elsőbb rangu más kincstároknál, hogy bár mennyit tegyen belőle magáévá az emberi szellem, legkisebb sem fogy el belőle. Tudva van mikép e' kincstár legelső tőkéjét az egyptomiak tevék le, nem sokára azután a' görögök és romaiak sokra kamatoztaták, majd egy hoszacska szünet után az angolok, németek, francziák és olaszok temérdekre gazdagiták, 's jelenleg a' legujabb időben is szüntelen gazdagitják, sőt mostanában minden nemzet igyekszik valamivel hozzá járulni.

Mi magyarok még semmivel sem járulánk a közkincstárhoz, avagy felmutathatni-e vagy egy tudományágot, nem mondom egy egész tudományrendszert, melly valamellyik magyar lángelméjében találná legelső eredetét?... Épen azért mert eddigelő semmivel sem szaporitók a közkincstárt, sokszoros kötelességünk ahoz saját fölfedezéseink- saját tanulmányainkkal járulni, mi — hitem szerint — bizonyára bekövetkezendik, ha a' tudományok iránti közkedvesség sebesebb léptekkel terjedvén, számosb — pangásban tengődendett elmék — hóditatnak meg a' tudománynak. Mert én nem hiszem mikép csupán az angol, német és franczia nemzet birna azon kiváltsággal, miszerint Newton-, Lavoisier- és Keplereket tudjon kebeléből előállitani. Illyszerü szellemeink — megvagyok győződve — voltak, 's megeshetik, vannak jelenleg is, csak körülmény, kedvező alkalom hiányzék mindeddig kifejlődhetésökre. Ha közszeretet terjedend el a' tudományosság iránt, sokban megváltoznak a' körülmények, és számlálhatandunk mi is jeleseket, kik kincskeresőkké szegődvén az értelem mezején, napfényre hozandanak sok drágaságot, megnevelendők azzal a' tudományosság közkincstárát a' magyar nemzet nevében is.

Azonban addig is, míg a' boldog kor bekövetkezendik, tegyünk meg annyit a' köztudományosság érdekében, mennyit ismereteinkhez képest tehetünk. 'S ez véleményem szerint — *nem csak abból állhat :* népszerü, minden pedantismust levetkezett müvekkel a' tudományosság iránti szeretetet ébreszteni, igyekezni, noha minden bizonnyal ez is egy út — csak hogy közvetitett út — arra ; de lehetne egyenesebben mostanában is némü tégladarabokkal járulnunk a' tudományosság középületéhez. Hogy ennek lehetőségét egy példával megbizonyitsam — jelenleg kedvező alkalmuk lehetne hazánk természettanászainak e' középülethez valamivel járulni : a' meteorologia ugyan is, ezen nevezetes ága a' természettannak, most van hogy ugy szóljak bölcsőjében. Számtalan fontos kérdései csak ugy lehetnek igazán megoldva, ha a' föld minden részeiben körültök vizsgálatok tétetnek, 's az egybegyüjtött adatok a' tudós világgal összehasonlitás végett közöltetnek ; csupán illy adatok összehasonlitásából vonhatni ki az igaz feleletet — melly közbevetőleg légyen szólva, annál igazabb leend, mentől számosbak valának az adatok, — mert az adatok nélküli speculatio teljesen ki van küszöbölve a' természettudományokból, mióta kiviláglott, hogy a' speculativa philosophia azon tana, — melly több századokon keresztül csalfa hiedelemben tartá az emberiséget — miszerint t. i. föld, lég, víz, és tűz elemek volnának — szörnyü tévedés. Adat és adat a' jelszó a' természettudományokban. Adatok fogják a' meteorologiát is érettebb állásra emelni. A' két magyarhazából nagy becsüek volnának a' tudományos világ előtt a' meteorologiai adatok. Továbbá, mi akadályoztatja vagy egy deléji observatorium nálunk is leendő felállitását? Költség talán ? Ez nem olly nagy, mikép csak középszerü buzgalommal is ki ne szereztethetnék.* Tán vezetésökre megkivántató egyedek hiánya ? Természettudósaink között nem számlálhatunk ugyan Melloni, Forbes, Arago vagy Dove-szerüeket, kik mindjárt mindjárt egy egy uj felfedezés, egy egy uj észrevétellel gazdagitják a' természettant ; — azonban ollyakat, kik a' természettan mezején teljesen jártasok, kik követni képesek — 's szeretem hinni — követik is a' minden ágaiban naponta történő fölfedezéseket — 's kik tehát alkalmasak volnának egy observatorium vezetésére — illyeket mondom számlálhatunk tudósaink között. Nem hiányzik e' szerint semmi egyébb — csak akarat, ennek

---

* A' müncheni csillagásztorony igazgatójának sikerült olly egyszerü készületet szerkesztetni össze, mellyel — a' mellett hogy minden eddigelő szükségesnek hitt költséges épületeket feleslegessé tesz — a' legnagyobb pontossággal tétethetnek meg a' föld magnetismusa körüli observatiok, 's mely minden költség nélkül akárhol felállitható. *M. F.*

pedig valahára támadnia kell, mert a' hon tekintete forog kérdésben a' tudományos világ előtt.

Illyetén szolgálatok létesitésében önhasznunkra és köztudományosság érdekében is, ki munkálkodhatnék nagyobb sikerrel mint a' természetvizsgáló társulat. Tagjai a két magyarhaza legtávolabb vidékeiből évenként egybegyülvén, milly üdvös eredményü leende, ha az avatottabbak illyetén adatokkal felkészülve jelennének meg. Ezen évenkinti gyüléseknek eddigelő — valljuk meg őszintén — nem sok eredményök volt, — illynemü adatok összegyüjtése és kiadása által megkezdhetné tettleges munkálkodását. Ugyan ő gondoskodhatnék egy observatorium felállitása iránt is. Valóban illynemü munkálkodása a' társulatnak annyival inkább sürgetőbb, mivel ha még soká késlekedünk, megérjük miszerint a franczia vagy valamelly más academia küldöttjeit hévmérő, barométer 's egyéb meteorologiai eszközökkel a' két magyarhaza vidékeit békalandozni látjuk, saját szemünk láttára összegyüjtendők azon adatokat, miket mi elmulasztánk felhasználni a' geognosia, physica, geographia 'stb. tökéletesitésére 's kérdem, dicséretére fogna-e ez válni a' két magyar haza természettudósainak?

Mentovich Ferencz.

VIZSGÁLATOK A FOURIER-FÉLE SOROK KÖRÉBŐL.

(Második és befejező közlemény.)

A summabilis sorokról általánosságban.

Vizsgálataink — a melyekből kitünik, hogy az (A) feltételnek eleget tevő függvények FOURIER-féle sora a széttartó soroknak igen egyszerű természetű osztályához tartozik — arra vezetnek bennünket, hogy *általánosságban* foglalkozzunk azokkal az

$$a_0 + a_1 + a_2 + \cdots$$

széttartó sorokkal, a melyekre nézve a részletösszegek számtani középértéknek határértéke létezik, azaz

$$\lim. \frac{s_0 + s_1 + \cdots + s_{n-1}}{n} = A$$

véges és meghatározott.

Ilyen sorokat — melyekkel már FROBENIUS,* CESARO ** foglalkoztak — *summabilis* soroknak akarunk nevezni; A-t a summabilis sor *summájának*.*** Czélunk lesz feltüntetni azon analogiákat, melyeket ezen sorok az összetartó végtelen sorokkal mutatnak.

Először is világos, hogy az «összetartás» egy általánositásával van dolgunk.

Ha ugyanis

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n$$

* Crelle Journal 1880, 89. kötet, 262. l.

** L. E. BOREL: Leçons sur les séries divergentes. 1901, 87. l.

*** A Σa_n summabilis végtelen sor summáját némelykor röviden Σa_n-nel jelöljük, ha nem kell félreértéstől tartanunk.

összetartó végtelen sor, és

$$\lim_{n=\infty} s_n = A,$$

akkor egyszersmind

$$\lim_{n=\infty} \frac{s_0+s_1+\cdots+s_{n-1}}{n} = A$$

egy ismeretes elemi határértéktétel értelmében, melyet itt feleslegeses bizonyítanunk. E szerint az összetartó sor egyszersmind summabilis és summája egyenlő a végtelen sor összegével.

A summabilitás egy első szükséges föltétele az, hogy

$$\lim_{n=\infty} \frac{a_0+a_1+\cdots+a_{n-1}}{n} = 0$$

legyen. Mert ha

$$\lim_{n=\infty} \frac{s_0+s_1+\cdots+s_{n-1}}{n} = A,$$

akkor egyszersmind

$$\lim_{n=\infty} \frac{s_0+s_1+\cdots+s_{n-2}}{n-1} = A.$$

Ámde

$$\lim_{n=\infty} \frac{n-1}{n} = 1,$$

tehát

$$\lim_{n=\infty} \frac{s_0+s_1+\cdots+s_{n-2}}{n} = A$$

és kivonással

$$\lim_{n=\infty} \frac{s_{n-1}}{n} = 0.$$

Ha továbbá

$$\sum_0^\infty a_n, \quad \sum_0^\infty b_n$$

summabilis sorok és summájuk rendre

$$A, \quad B,$$

akkor

$$\sum_0^\infty (\alpha a_n + \beta b_n)$$

is summabilis és summája

$$\alpha A + \beta B.$$

A föltétel szerint ugyanis

$$\lim_{n=\infty} \frac{na_0+(n-1)a_1+\cdots+a_{n-1}}{n} = A$$

és

$$\lim_{n=\infty} \frac{nb_0+(n-1)b_1+\cdots+b_{n-1}}{n} = B,$$

tehát

$$\lim \frac{n(\alpha a_0+\beta b_0)+(n-1)[\alpha a_1+\beta b_1]+\cdots+(\alpha a_{n-1}+\beta b_{n-1})}{n} =$$

$$= \alpha A + \beta B.$$

Az összetartó sorok összeadási (kivonási) szabálya tehát itt is érvényben marad.

De érdekes, hogy az összetartó soroknak ú. n. Abel-*féle szorzási szabályának analog tétele is érvényes.* Részletesen:

Ha a

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n, \quad \sum_{n=0}^{\infty} b_n, \quad \sum_{n=0}^{\infty} (a_0b_n+a_1b_{n-1}+\cdots+a_nb_0)$$

sorok summabilisak, és summájuk rendre A, B, C, akkor

$$AB = C.$$

E tétel következik az ú. n. második Abel-féle hatványsortétel egy általánositásából, melyet legelőször Frobenius bizonyított be (l. idézett helyen).

A szóban forgó általánositás így hangzik: Legyen a

$$P(r) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n$$

valós együtthatókkal biró hatványsora az r valós változónak öszszetartó ha $|r| < 1$, és legyen

$$\lim_{n=\infty} \frac{s_0+s_1+s_2+\cdots+s_{n-1}}{n} = A,$$

hol

$$s_n = a_0+a_1+\cdots+a_{n-1}+a_n,$$

akkor *

$$\lim_{r=1} P(r) = A.$$

Ugyanis ha $|r| < 1$

$$P(r) = (1-r)^2 \frac{1}{(1-r)^2} \sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n.$$

De ugyanakkor

$$\frac{1}{(1-r)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) r^n,$$

tehát

$$P(r) = (1-r)^2 \sum_{n=0}^{\infty} [(n+1) a_0 + n a_1 + \cdots + a_n] r^n.$$

Ámde a föltétel szerint

$$\lim_{n=\infty} \frac{(n+1) a_0 + n a_1 + \cdots + a_n}{n+1} = A$$

és így

$$(n+1) a_0 + n a_1 + \cdots + a_n = (n+1) A + (n+1) \varepsilon_{n+1}$$

hol

$$\lim_{n=\infty} \varepsilon_n = 0.$$

De akkor

$$P(r) = (1-r)^2 \sum_{n=0}^{\infty} A (n+1) r^n + (1-r)^2 \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_{n+1}(n+1) r^n$$

vagy

$$P(r) - A = (1-r)^2 \sum_{0}^{N} \varepsilon_{n+1}(n+1) r^n + (1-r)^2 \sum_{N+1}^{\infty} \varepsilon_{n+1}(n+1) r^n.$$

---

* E tétel — épen úgy mint az ABEL-féle — így általánosítható: Ha $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ az egységkör belsejében összetartó hatványsor és

$$\lim_{n=\infty} \frac{s_0 + s_1 + \cdots + s_{n-1}}{n} = A,$$

akkor

$$\lim_{z=1} [\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n] = A,$$

ha a határátmenet tetszés szerinti olyan egyenes vonal mentén történik, mely az egységkör belsejéből az 1 ponthoz vezet. Ha tehát pl. a hatványsor olyan analytikai függvényt jellemez, mely az 1 helyen szabályos, akkor a függvény értéke e helyen egyenlő A-val. Megjegyezzük, hogy pl. a $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ geometriai haladvány az egész összetartási körön [az 1 hely kivételével] summabilis.

Most N-et úgy választva, hogy

$$|\varepsilon_n| < \delta \quad \text{ha} \quad n > N$$

a második rész abszolut értéke kisebb mint

$$(1-r)^2\delta \sum_{N+1}^{\infty}(n+1)r^2 < (1-r)^2\delta \sum_{0}^{\infty}(n+1)r^n = \delta$$

és így

$$|P(r)-A| < (1-r)^2 \sum_{0}^{N} |\varepsilon_{n+1}|(n+1)r^n + \delta.$$

Ha tehát $(1-r)$ elegendő kicsiny

$$|P(r)-A| < 2\delta$$

a mivel a tétel be van bizonyítva.

De térjünk vissza a fönt kimondott szorzási szabály bizonyítására.

A föltétel szerint $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ summabilis. Azt állítjuk, hogy akkor a

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n$$

hatványsor összetartó, ha $|r| < 1$.

Valóban

$$\frac{1}{1-r}\sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n = s_0 + s_1 r + s_2 r + \cdots + s_n r^n + \cdots$$

és így elég bebizonyítani, hogy a jobb oldalon álló sor összetartó, ha $|r| < 1$. Erre nézve pedig elég, ha kimutatjuk, hogy a tagonként való integrálás által nyert

$$s_0 r + \frac{s_1}{2} r^2 + \frac{s_2}{3} r^3 + \cdots + \frac{s_n}{n+1} r^n + \cdots$$

sor összetartó, ha $|r| < 1$. Ámde ez világos, mert a mint láttuk a $\sum^{\infty} a_n$ summabilitása maga után vonja a

$$\lim_{n=\infty} \frac{s_n}{n+1} = 0$$

egyenletet és így állításunk igazolva van.

E szerint a

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n, \quad \sum_{n=0}^{\infty} b_n r^n, \quad \sum_{n=0}^{\infty} c_n r^n$$

hatványsorok, hol

$$c_n = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \cdots + a_n b_0$$

a föltétel következtében összetartók, ha $|r|<1$. Ámde, ha $|r|<1$, akkor bizonyára

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n r^n\right) = \sum_{n=\infty}^{\infty} c_n r^n$$

és mert a FROBENIUS-féle tétel értelmében

$$\lim_{r=1} \sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n = A, \quad \lim_{r=1} \sum_{n=0}^{\infty} b_n r^n = B$$

és

$$\lim_{r=1} \sum_{n=0}^{\infty} c_n r^n = C,$$

tehát

$$AB = C$$

és a szorzási szabály be van bizonyítva.

Ezzel kapcsolatban megemlítünk egy érdekes — CESARO-tól eredő — tételt.

Ha

$$U = \sum_{n=0}^{\infty} u_n, \quad V = \sum_{n=0}^{\infty} v_n$$

összetartó végtelen sorok, akkor a

$$\sum_{n=0}^{\infty} w_n$$

sor, hol

$$w_n = u_0 v_n + u_1 v_{n-1} + \cdots + u_n v_0$$

mindig summabilis és summája egyenlő UV-vel.*

Legyen röviden

$$U_n = \sum_{0}^{n} u_i, \quad V_n = \sum_{0}^{n} v_i, \quad W_n = \sum_{0}^{n} w_i,$$

---

* L. BOREL-nél idézett helyen 88. old.

akkor világos, hogy

$$W_n = u_0 V_n + u_1 V_{n-1} + \cdots + u_n V_0.$$

E szerint

$$W_0 + W_1 + \cdots + W_n = U_0 V_n + U_1 V_{n-1} + \cdots + U_n V_0.$$

Ámde a föltétel szerint

$$U_i = U + \varepsilon_i, \quad V_i = V + \eta_i,$$

hol

$$\lim_{i=\infty} \varepsilon_i = 0, \quad \lim_{i=\infty} \eta_i = 0,$$

tehát

$$\frac{W_0 + W_1 + \cdots + W_n}{n+1} = UV + U\frac{\eta_0 + \eta_1 + \cdots + \eta_n}{n+1} +$$

$$+ V\frac{\varepsilon_0 + \varepsilon_1 + \cdots + \varepsilon_n}{n+1} +$$

$$+ \frac{\varepsilon_0\eta_n + \varepsilon_1\eta_{n-1} + \cdots + \varepsilon_n\eta_0}{n+1}.$$

De mert

$$\lim_{i=\infty} \varepsilon_i = 0, \quad \lim_{i=\infty} \eta_i = 0,$$

tehát

$$\lim_{n=\infty} \frac{\eta_0 + \eta_1 + \cdots + \eta_n}{n+1} = 0$$

$$\lim_{n=\infty} \frac{\varepsilon_0 + \varepsilon_1 + \cdots + \varepsilon_n}{n+1} = 0$$

és

$$\lim_{n=\infty} \frac{\varepsilon_0\eta_n + \varepsilon_1\eta_{n-1} + \cdots + \varepsilon_n\eta_0}{n+1} = 0$$

és így

$$\lim_{n=\infty} \frac{W_0 + W_1 + \cdots + W_n}{n+1} = UV.$$

(Megjegyezzük, hogy e tétel akkor is érvényes, ha a soroknak csak egyike összetartó, a másik pedig olyan módon summabilis, hogy a részletösszegek ingadozási határai végesek).

Ha

$$a_0(x) + a_1(x) + \cdots + a_n(x) + \cdots$$

végtelen sorban a tagok egy (b, c) számközben függvényei egy x

parameternek, akkor e sort a (bc) számközre nézve *egyenletesen summabilisnak* mondjuk, ha

$$S_n(x) = \frac{s_0(x)+s_1(x)+\cdots+s_{n-1}(x)}{n}$$

egyenletesen konvergál a (bc) számközre nézve egy $f(x)$ határfüggvény felé. Ha a sortagok folytonosak a (bc) számközben, akkor $f(x)$ is folytonos ugyanott. Világos továbbá az is, hogy egyenletesen summabilis $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x)$ sor esetében

$$\int_b^c [\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x)]\, dx = \sum_{n=0}^{\infty} [\int_b^c a_n(x)\, dx].$$

A most bevezetett terminologia felhasználásával mondhatjuk: Valamely mindenütt folytonos (2π szerint szakaszos) $f(x)$ függvény FOURIER-féle sora minden véges számközben (nem szükségképen egyenletesen összetartó), de *egyenletesen summabilis.*

Kimutatjuk, hogy *ilyen* sorfejtés csak egyetlenegy létezik. Vagyis ha

$$a_0+a_1\sin x+b_1\cos x+\cdots+a_n\sin nx+b_n\cos nx+\cdots$$

a 0-tól 2π-ig terjedő számközben — a határokat beleértve - egyenletesen summabilis és summája $f(x)$, akkor

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\, dx$$

$$\left.\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin nx dx \\ b_n &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos nx dx \end{aligned}\right| n = 1, 2, \ldots \infty$$

A föltétel szerint ugyanis

$$\frac{s_0(x)+s_1(x)+\cdots+s_{n-1}(x)}{n},$$

hol

$$s_{n-1}(x) = a_0 + a_1 \sin x + b_1 \cos x + \cdots +$$
$$+ a_{n-1} \sin \overline{n-1}\, x + b_{n-1} \cos \overline{n-1}\, x$$

lim. $n=\infty$-re egyenletesen konvergál az $f(x)$ határfüggvényhez, tehát

$$\frac{s_0(x)+s_1(x)+\cdots+s_{n-1}(x)}{n} \sin kx$$

egyenletesen konvergál $f(x) \sin kx$-hez, és igy

$$\lim_{n=\infty} \int_0^{2\pi} \frac{s_0(x)+s_1(x)+\cdots+s_{n-1}(x)}{n} \sin kx dx = \int_0^{2\pi} f(x) \sin kx dx.$$

De ha $n > k$

$$\int_0^{2\pi} \frac{s_0(x)+s_1(x)+\cdots+s_{n-1}(x)}{n} \sin kx dx = \int_0^{2\pi} \frac{n-k}{n} a_k \sin^2 kx dx =$$
$$= \frac{n-k}{n} \pi a_k$$

és igy

$$\lim_{n=\infty} \frac{n-k}{n} \pi a_k = \int_0^{2\pi} f(x) \sin kx dx,$$

vagyis

$$\pi a_k = \int_0^{2\pi} f(x) \sin kx dx \quad \text{stb.}$$

E szerint minden folytonos (2π szerint szakaszos) függvény fejthető — és csakis *egyféleképen* — *egyenletesen* summabilis trigonometrikus sorba.

Alkalmazások az összetartó trigonometrikus és Fourier-féle sorra.

Azt hiszszük, hogy érdekes világot vet az *összetartó* trigonometrikus sorok elméletére is a következő jelenség:

A föntebbi egyértelmüségi tétel általában *nem* érvényes, ha csak egyetlenegy helyen (a $\overline{0, 2\pi}$ számközben) szűnik meg az egye. summabilitás. Más szóval: míg a CANTOR-féle tétel értelmében a

$$0 = a_0 + a_1 \sin x_1 + b_1 \cos x + \cdots + a_n \sin nx + b_n \cos nx + \cdots$$

egyenletből következik, hogy az összes együtthatók egyenlők 0-sal, ha a jobb oldalon álló trigonometrikus sor a $\overline{0, 2\pi}$ számközben, pl. *végesszámú hely kivételével összetartó*, addig az analog tétel a *summabilis* trigonometrikus sorokra már *nem* érvényes. Ugyanis a már tárgyalt

$$\tfrac{1}{2} + \cos x + \cos 2x + \cdots + \cos nx + \cdots$$

sor csak a 0 hely* (és természetesen a $2k\pi$ helyek) kivételével summabilis és summája 0 és az együtthatók nem mind zérussal egyenlők. Ennek következtében, ha pl.

$$\tfrac{1}{2} b_0 + b_1 \cos x + b_2 \cos 2x + \cdots + b_n \cos nx + \cdots$$

egy summabilis cosinus sor akkor — a 0 helyet kivéve (és a mod. 2π kongruenseket) ugyanazon summájuk van az

$$\begin{gathered}\tfrac{1}{2}[b_0+1] + (b_1+1)\cos x + \cdots + (b_n+1)\cos nx + \cdots \\ \tfrac{1}{2}[b_0+2] + (b_1+2)\cos x + \cdots + (b_n+2)\cos nx + \cdots \\ \vdots\end{gathered}$$

trigonometrikus soroknak is.

Látjuk ebből, hogy mennyire jellemző a CANTOR-féle tétel épen az *összetartó* trigonometrikus sorokra. A CANTOR-féle tétel bebizonyitásánál tehát az *összetartást* valóban mélyen kihasználjuk.

*

Egy másik alkalmazás az összetartó FOURIER-féle sorra vonatkozik.

Legyen $f(x)$ egy a $\overline{0, 2\pi}$ számközben az (A) föltételnek megfelelő függvény; tegyük fel, hogy az $f(x)$-hez tartozó

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\alpha)\,d\alpha + \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(\alpha)\cos n(\alpha - x)\,d\alpha\right]$$

* Tehát a $(0, 2\pi)$ számköz véges számú helye kivételével.

FOURIER-féle sor egy x helyen — a hol $f(x)$ folytonos — *összetartó.* Kérdés, vajjon a sor értéke e helyen egyenlő-e $f(x)$-el? Érdekes, hogy erre igennel kell felelnünk. Ez a FOURIER-féle sorfejtésnek egy nagyon jellemző tulajdonsága.*

Mivel ugyanis az $f(x)$ FOURIER-féle sora összetartó az x helyen, tehát itt mindenesetre summabilis és mint ilyen bír egy bizonyos summával, mely bizonyára egyenlő a végtelen sor összegével. A szóban forgó summa azonban vizsgálataink értelmében egyenlő $f(x)$-el, és így a FOURIER-féle sor *összege* is csak $f(x)$ lehet az x folytonossági helyen. Állításunk tehát bizonyítva.

Hasonlóképen: ha a FOURIER-féle sor összetartó egy olyan x helyen, a hol $f(x)$-nek elsőfajú szakadása van, akkor értéke itt csak $\frac{1}{2}[f(x+0)+f(x-0)]$ lehet.

Könnyű továbbá belátni, hogy a FOURIER-féle sor oly x helyen, a hol az (A) feltételeknek eleget tevő $f(x)$ folytonos, nem lehet ú. n. «valódi» széttartó sor (eigentliche Divergenz), azaz nem lehet

$$\lim_{n=\infty} s_n(x) = +\infty \quad \text{vagy} \quad -\infty.$$

Mert ha pl. $+\infty$ volna a

$$\lim_{n=\infty} s_n(x)$$

határérték, akkor egyszersmint a

$$\lim_{n=\infty} \frac{s_0(x)+s_1(x)+\cdots+s_{n-1}(x)}{n}$$

határérték is $+\infty$ volna, a mi pedig nem úgy van, mert e határérték $=f(x)$-el.

Általában:

$$\lim_{n=\infty}\text{inf. } s_n(x) \leqq f(x) \leqq \lim_{n=\infty}\text{sup. } s_n(x).$$

*

* Tudjuk, hogy pl. a TAYLOR-féle sor *lehet* összetartó a nélkül, hogy azt a függvényt, a melyhez tartozik ábrázolni. CAUCHY példája erre nézve

$$f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}} \quad \text{ha} \quad x \gtrless 0 \quad \text{és} \quad f(0) = 0.$$

Ekkor a TAYLOR-féle sor minden x értékre nézve összetartó és értéke 0.

Alkalmazás a POISSON-féle integrál elméletére.

Vizsgálataink egy, ma már klasszikusnak mondható tétel bizonyítását engedik meg, *olyan úton,* melyen azt a mathematikusok sokáig keresték. Értjük a «POISSON-féle integráltétel bizonyítását». Ez alatt röviden a következő tételt szokás érteni:

Ha $f(x)$ egy mindenütt egyértékű, valós, véges, folytonos és 2π szerint szakaszos függvénye az x valós változónak, akkor

$$I(r, \varphi) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\psi)\,d\psi + \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(\psi)\cos n(\psi-\varphi)\,d\psi\right] r^n \tag{1}$$

a kezdőpont körül egységnyi sugárral rajzolható kör belsejének minden pontjára nézve egyértékűleg értelmezett függvénye az r, φ polarkoordinátáknak, mely

a) mint az $x=r\cos\varphi$, $y=r\sin\varphi$ változók függvénye az egységkör minden belső pontjára nézve eleget tesz a

$$\Delta u \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

parcziális differencziálegyenletnek,

b) és folytonosan megy át az $f(\varphi)$ kerületi függvénybe, a mi alatt pontosan a következőt értjük: ha $(1, \varphi_0)$ az egységkör kerületének egy bizonyos helye és δ egy előre megadott tetszőleges kicsiny pozitiv szám, akkor lehet találni két pozitiv számot ρ-t és ε-t $(\rho<1)$, úgy hogy

$$|I(r, \varphi)-f(\varphi_0)| < \delta$$

valahányszor

$$\rho \leqq r \leqq 1 \quad \text{és} \quad \varphi_0-\varepsilon \leqq \varphi \leqq \varphi_0+\varepsilon.$$

A tétel *a)* része evidens. Ha ugyanis rövidség kedvéért

$$\alpha_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\psi)\,d\psi, \quad \alpha_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(\psi)\sin n\psi d\psi,$$

$$\beta_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(\psi)\cos n\psi d\psi,$$

$$(n=1, 2, \ldots \infty)$$

akkor

$$I(r, \varphi) = \alpha_0 + (\alpha_1 \sin\varphi + \beta_1 \cos\varphi) r + \cdots + \\ + (\alpha_n \sin n\varphi + \beta_n \cos n\varphi) r^n + \cdots$$

De — a már egyszer idézett — RIEMANN-féle tétel értelmében

$$\lim_{n=\infty} \alpha_n = 0, \quad \lim_{n=\infty} \beta_n = 0,$$

tehát a szóban forgó sor valóban összetartó, ha $r<1$. Ámde $I(r, \varphi)$ képzetes komponense az

$$\alpha_0 + (\alpha_1 + i\beta_1) z + \cdots + [\alpha_n + i\beta_n] z^n + \cdots$$

egységkörben szabályos analytikai függvénynek: tehát eleget tesz a $\Delta u = 0$ egyenletnek.

A POISSON-féle integráltétel súlypontja annak (*b*) részébe esik. Ennek teljesen szigorú és egyszerű bebizonyítását H. A. SCHWARZ adta a sornak ($r<1$-re érvényes) zárt integrál alakját

$$I(r, \varphi) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1-r^2}{1-2r\cos(\psi-\varphi)+r^2} f(\psi)\, d\psi$$

az ú. n. POISSON-féle integrált használva fel. E mellett azonban még mindig több szempontból kívánatosnak és érdekesnek látszott a POISSON-féle integráltételnek egy olyan bebizonyítása, a mely annak (1) alatt adott *soralakját* fekteti alapul, és a melyet — ennek megfelelőleg — talán a tétel *sorelméleti* bizonyításának lehet nevezni.

Ilyen irányú bizonyítással foglalkoztak: RIEMANN, CARL NEUMANN, HEINE, SCHÄFLI, PRYM stb.

ARNOLD SACHSE ismert történeti értekezésében erre vonatkozólag a következő — körülbelül H. A. SCHWARZ nézetét tolmácsoló — sorokat olvashatjuk:

«. . . Il ne semble donc pas, qu'on puisse partir de la série de FOURIER si l'on veut démontrer le théorème dans toute sa généralité, parce qu'on n'a pas la démonstration, que la série de FOURIER converge pour toutes les fonctions continues. La deuxième partie de la remarque de RIEMANN ne parait donc pas justifiée». (1880.)

Hasonló szellemben nyilatkozik PICARD is «Traité d'Analyse»-jében.

Ha az $f(\varphi)$ FOURIER-féle sora *mindenütt összetartó* és ha továbbá *egyenletesen* összetartó, akkor* e sorelméleti bizonyitás a második ABEL-féle hatványsortétel segitségével könnyen eszközölhető, ha annak egy lényeges (másutt is alkalmazható) kiegészitést adunk.

A szóban forgó ABEL-féle tétel tudvalevőleg igy hangzik:

Ha a $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ végtelen sor összetartó, akkor

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n$$

összetartó, ha $|r| < 1$ és

$$\lim_{r=1} \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n .$$

Az emlitett kiegészités, a melyet egyszerűsége miatt bizonyitani nem kivánunk, a következőben áll:

Ha $a_n(\varphi)$ $(n = 0, 1, 2, \ldots \infty)$ a (b, c) számközben függvényei egy φ valós változónak és ezen számközben

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(\varphi)$$

egyenletesen összetartó (a határhelyeket beleértve), akkor

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(\varphi) r^n$$

a $\lim.\, r = 1$ határátmenetnél a (b, c) számközre nézve *egyenletesen* konvergál a $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(\varphi)$ határfüggvényhez. Pontosan: egy tetszőeges kicsiny pozitiv δ-hoz kijelölhető egy ρ pozitiv szám, mely

---

* Fölösleges kiemelnünk, hogy a POISSON-féle integráltétel érdekessége és fontossága a DIRICHLET-féle probléma általános elméletében lényegesen abban áll, hogy *tetszőleges* folytonos kerületi függvényre nézve is érvényes

kisebb mint 1, úgy hogy

$$|(\sum_{n=0}^{\infty} a_n(\varphi) r^n) - \sum_{n=0}^{\infty} a_n(\varphi)| < \delta,$$

ha csak

$$\rho < r \leqq 1 \quad \text{és} \quad b \leqq \varphi \leqq c.$$

Világos, hogy az ilyen módon kiegészített ABEL-féle tétel egyenletesen összetartó FOURIER-féle sor esetében rögtön czélhoz vezet.

Legyen ugyanis ε az előre megadott pozitiv δ-hoz következőképen meghatározva:

$$|f(\varphi) - f(\varphi_0)| < \delta,$$

ha

$$\varphi_0 - \varepsilon \leqq \varphi \leqq \varphi_0 + \varepsilon.$$

Akkor

$$b = \varphi_0 - \varepsilon, \quad c = \varphi_0 + \varepsilon, \quad a_0(\varphi) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\psi)\, d\psi,$$

$$a_n(\varphi) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(\psi) \cos n(\psi - \varphi)\, d\psi$$

$$(n=1, \ldots \infty)$$

téve segédtételünkbe:

$$|I(r, \varphi) - f(\varphi)| < \delta,$$

ha

$$\rho < r \leqq 1, \quad \varphi_0 - \varepsilon \leqq \varphi \leqq \varphi_0 + \varepsilon$$

vagy a fenti egyenlőtlenséget tekintetbe véve:

$$|I(r, \varphi) - f(\varphi_0)| < 2\delta,$$

ha

$$\rho < r \leqq 1, \quad \varphi_0 - \varepsilon \leqq \varphi \leqq \varphi_0 + \varepsilon$$

a mit épen bizonyitani akartunk.

De *teljesen hasonló bizonyítás lehetséges az általános esetben.* Áll ugyanis a következő — előző vizsgálataink alapján rögtön belátható — tétel:

Ha $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(\varphi)$ *egyenletesen summabilis* egy (b, c) számközben (a határhelyeket beleértve) és summája $f(\varphi)$, akkor ezen számközre nézve

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(\varphi) r^n \qquad \text{(összetartó, ha } r<1)$$

a lim. $r=1$ határátmenetnél *egyenletesen konvergál* az $f(\varphi)$ határfüggvényhez.

De tudjuk, hogy tetszőleges folytonos kerületi függvény esetében a FOURIER-féle sor egyenletesen summabilis és így a POISSON-féle integráltétel tetszőleges folytonos kerületi függvény esetére is be van bizonyítva, olyan módon, mely az $I(r, \varphi)$ hatványsornak csak az együttható sorát használja fel.

Ha a függvénynek a φ_0 helyen elsőfajú szakadása van, akkor vizsgálataink értelmében

$$\lim_{r=1} I(r, \varphi_0) = \tfrac{1}{2}[f(\varphi_0+0)+f(\varphi_0-0)]$$

a mi a geometriai képben a *sugár*menti határátmenetnek felel meg.

Módszerünk — a mi a kerületi függvény viselkedésére vonatkozó megszorításokat illeti — lényegesen általánosítható — addig, a midőn végre már csak az (A) föltételnek eleget tevő határfüggvények szerepelnek. Ezt a tárgyat azonban nem kivánjuk tovább követni.

Alkalmazás a WEIERSTRASS-féle tételre.

A következőkben az általános függvénytan egy fontos és érdekes tételével az ú. n. WEIERSTRASS-féle tétellel kivánunk foglalkozni.

WEIERSTRASSnak ezen eddig aránylag kevés figyelemben részesített felfedezése különösen annyiban alapvető fontosságú az általános függvénytanra nézve, a mennyiben — és ezt különösen most közlendő vizsgálataink fogják mutatni — igen egyszerű és használható *módszert* nyujt ama kérdés vizsgálatánál, melynek czélja az EULER-*féle és* DIRICHLET-*féle függvényfogalom közötti viszonyt* földeriteni, jobban mondva kikutatni, hogy a két fogalom *mennyiben* fedi egymást.

A WEIERSTRASS-féle tétel következőképen hangzik.*

* L. Berliner Berichte 1885, 633., 789. old. Ugyanez franczia nyelven: Lionville Journal 1886.

Ha $f(x)$ egy a (b, c) számköz belsejében és annak határain *folytonos* függvény, akkor bármilyen kicsiny pozitiv szám is δ lehet találni egy véges trigonometrikus sort

$$F(x) = \lambda_0 + \lambda_1 \sin x + \mu_1 \cos x + \cdots + \lambda_n \sin nx + \mu_n \cos nx,$$

úgy hogy

$$|f(x) - F(x)| < \delta,$$

ha

$$b \leqq x \leqq c$$

vagy, a miből rögtön következik, létezik egy $g(x)$ *racziónalis egész függvény*, úgy hogy

$$|f(x) - g(x)| < \delta,$$

ha

$$b \leqq x \leqq c$$

WEIERSTRASS vizsgálatainak alapja az

$$F(x, k) = \frac{1}{k\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(u)\, e^{-\left(\frac{u-x}{k}\right)^2} du$$

integrál. Itt $f(x)$ egy az x (valós) argumentum minden értékére nézve folytonos függvény, melynek abszolut értéke mindig kisebb egy bizonyos M pozitiv számnál, k pedig egy pozitiv parameter.

WEIERSTRASS kimutatja, hogy $F(x, k)$ transzczendens egész függvénye az x-nek, hogy

$$\lim_{k=0} F(x, k) = f(x)$$

és pedig az összetartás *egyenletesen* történik minden *véges* számközben. Ezekből a tétel mindjárt következik.*

A WEIERSTRASS-féle tétel bizonyítására E. PICARD a POISSON-

* WEIERSTRASS bizonyítása a tétel egyszerűségéhez képest, aránylag hosszadalmas és talán kissé önkényesnek is tünhetik fel az $F(x, k)$ integrál alapulfektetése. Megjegyezzük azonban, hogy újabban L. Maurer [Math. Annalen 1896] az $F(x, k)$ integrálnak egy igen érdekes általános függvénytani jelentését mutatta ki.

féle integrált használja fel igen szellemesen. (L. Comptes Rendus, Paris t. CXII. 1897 és «Traité d'Analyse» l. I.)

Talán legtermészetesebb kiindulási pont a tétel bizonyitására a FOURIER-féle sorfejtés.

Legyen $f(x)$ folytonos a (b, c) számközben. Az általánosság megszorítása nélkül föltehetjük, hogy

$$0 < b < c < 2\pi.$$

Egészítsük ki a függvény definiczióját az egész $\overline{0, 2\pi}$ számközre, de úgy, hogy mindenütt folytonos legyen. Az ilyen módon 0-tól 2π-ig definiált folytonos függvényt jelöljük megint $f(x)$-el.

Ha e függvény

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(a)\,da + \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(a)\cos n\,(a-x)\,da\right]$$

FOURIER-féle sora egyenletesen összetartó volna, akkor mindjárt ez oldaná meg a feladatot; mert ha ugyanis az

$$s_0(x),\ s_1(x), \ldots, s_n(x), \ldots$$

részletösszegek egyenletesen konvergálnak (b, c)-re nézve az $f(x)$ határfüggvényhez, akkor a tetszőleges kicsiny pozitiv δ-hoz meghatározható egy N úgy, hogy

$$|f(x) - s_n(x)| < \delta,$$

ha

$$b \leqq x \leqq c \quad \text{és} \quad n \geqq N.$$

Ámde tudjuk, hogy az arithmetikai közép képezése által nyert, véges trigonometrikus sorokból álló

$$S_1(x),\ S_2(x), \ldots, S_n(x), \ldots$$

függvénysorozat *tetszőleges* folytonos $f(x)$ esetében is *egyenletesen* konvergál $f(x)$-hez és így, ha csak n elég nagy, mindenesetre

$$|f(x) - S_n(x)| < \delta,$$

ha

$$b \leqq x \leqq c$$

a mivel a WEIERSTRASS-féle tétel lényegben bizonyitva van.

WEIERSTRASS most megfontolásait következőképen folytatja:* Legyen

$$S_N(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_\nu x^\nu + \cdots$$

akkor a hatványsor egyenletes összetartása miatt ha csak ν elég nagy

$$|S_N(x) - (a_0 + a_1 x + \cdots + a_\nu x^\nu)| < \delta,$$

ha

$$b \leqq x \leqq c$$

és így

$$|f(x) - (a_0 + a_1 x + \cdots + a_\nu x^\nu)| < 2\delta,$$

ha

$$b \leqq x \leqq c$$

vagyis, ha δ tetszőleges kicsiny pozitiv szám képezhető olyan $g(x)$ raczionalis egész függvény (végtelen sokféleképen): úgy, hogy

$$|f(x) - g(x)| < \delta$$

minden x-re nézve, mely

$$b \leqq x \leqq c.$$

Legyen most

$$\sum_{n=1}^{\infty} \delta_n$$

egy pozitivtagu összetartó végtelen sor és határozzuk meg a

$$g_1(x), g_2(x), \ldots, g_n(x), \ldots$$

raczionalis egész függvényeket olyan módon, hogy

$$|f(x) - g_n(x)| < \delta_n$$

legyen, ha

$$b \leqq x \leqq c.$$

Világos, hogy akkor

$$\lim_{n=\infty} g_n(x) = f(x),$$

ha

$$b \leqq x \leqq c$$

és

$$f(x) = g_1(x) + [g_2(x) - g_1(x)] + \cdots + [g_n(x) - g_{n-1}(x)] + \cdots$$

hol a jobb oldalon álló sor az x raczionalis egész függvény sze-

---

* L. pl. PICARD: Traité d'Analyse I. kötet.

rint haladó és a (b, c) számközben egyenletesen összetartó függvénysor. De egyszersmind föltétlenül összetartó is a tekintetbe jövő x értékekre nézve.

Ugyanis

$$g_n(x)-g_{n-1}(x) = (g_n(x)-f(x))+(f(x)-g_{n-1}(x)),$$

tehát

$$|g_n(x)-g_{n-1}(x)| < \delta_n+\delta_{n-1}.$$

Ámde

$$\Sigma(\delta_n+\delta_{n-1})$$

összetartó, és igy mondhatjuk:

Egy véges (b, c) számközön belül folytonos $f(x)$ függvény raczionalis egész függvények szerint haladó függvénysorba fejthető, mely a (b, c) számközre nézve egyenletesen összetartó és a számköz minden helyén föltétlenül összetartó.

Már említettük, hogy Weierstrass fent idézett integrálja segitségével (melynek határai: $-\infty$, $+\infty$) kimutatja azt is, hogy ha $f(x)$ az argumentum *minden véges* értékére nézve folytonos függvény, *melynek abszolut értéke mindig kisebb egy bizonyos M pozitiv számnál,* akkor szintén létezik egy

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)$$

raczionalis egész függvények szerint haladó függvénysor, mely minden véges számközben egyenletesen összetartó és $f(x)$-et előállítja.

Ki akarjuk mutatni, hogy a tételnek eme kiterjesztése «végtelen nagy számközre» *direkt következménye a véges számközre kimondott* Weierstrass-féle tételnek és el is *fogjuk e mellett ejteni* ama megszorítást, hogy a függvény abszolut értéke mindig egy véges felső határ alatt maradjon.

Minden megszorítás nélkül áll ugyanis a következő tétel:

Ha $f(x)$ egy a $(-\infty, +\infty)$ számközben* tetszőleges folytonos függvény, akkor létezik egy raczionalis egész függvények szerint

* Ez alatt természetesen azt értjük: minden véges x-re nézve.

haladó sorfejtés

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x),$$

mely minden x-re nézve (abszolut) összetartó, és minden véges számközben egyenletesen összetartó.

Legyen ugyanis

$$w_1, w_2, \ldots, w_n, \ldots$$

a folyton és minden határon túl nagyobbodó pozitiv számok sorozata, míg

$$\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n, \ldots$$

a folyton kisebbedő pozitiv számok sorozata, melyre nézve $\lim_{n=\infty} \delta_n = 0$.

Akkor a véges számközre vonatkozó WEIERSTRASS-féle tétel értelmében meghatározható a

$$g_1(x), g_2(x), \ldots, g_n(x), \ldots$$

raczionalis egész függvények sorozata, úgy hogy:

$$\begin{array}{lll}
|f(x)-g_1(x)| < \delta_1 & \text{ha} & -w_1 \leqq x \leqq +w_1 \\
|f(x)-g_2(x)| < \delta_2 & « & -w_2 \leqq x \leqq +w_2 \\
 & \vdots & \\
|f(x)-g_n(x)| < \delta_n & « & -w_n \leqq x \leqq +w_n \\
 & \vdots &
\end{array}$$

Világos, hogy akkor

$$\lim_{n=\infty} g_n(x) = f(x)$$

minden véges x-re nézve.

Mert valóban, legyen x egy bizonyos hely, akkor, ha csak $n > N_1$.

$$w_n > x$$

és ha csak $n > N_2$

$$\delta_n < \delta,$$

hol δ tetszőleges kicsiny, előre megadott pozitiv szám.

Legyen $N > N_1, N_2$. Akkor, ha csak $n > N$

$$|f(x) - g_n(x)| < \delta$$

és igy valóban

$$\lim_{n=\infty} g_n(x) = f(x).$$

Világos továbbá, hogy az összetartás minden véges számközben egyenletesen történik.

E szerint

$$g_1(x)+[g_2(x)-g_1(x)]+\cdots+[g_n(x)-g_{n-1}(x)]+\cdots$$

valóban a követelményeknek eleget tevő függvénysor, mely azonfelül föltétlenül összetartó is, ha $\sum_1^\infty \delta_n$-t összetartó pozitivtagú sornak vettük fel. Természetesen végtelen sok ilyen előállítás lehetséges.

*

Áttérünk a WEIERSTRASS-féle tétel alkalmazására. *Czélunk lesz lehetőleg általános függvényosztályokat kijelölni, melyek raczionalis egész függvények szerint haladó (egyszeresen vagy többszörösen végtelen sorba) függvénysorba fejthetők,* vagyis olyan függvényosztályokat, melyek az EULER-féle értelemben analytikaiak.* Szolgálni fog nekünk erre a WEIERSTRASS-féle tételnek egy igen egyszerű de mégis fontos kibővítése.

Legyen $f(x)$ egy véges (b, c) számközben egyértékűleg értelmezett *tetszőleges* függvény akkor, *ha* előállítható a *folytonos* függvényeknek egy

$$\varphi_1(x),\ \varphi_2(x), \ldots, \varphi_n(x), \ldots$$

sorozata, úgy hogy

$$\lim_{n=\infty} \varphi_n(x) = f(x) \qquad (b \leqq x \leqq c)$$

akkor egyszersmint előállitható a

$$g_1(x),\ g_2(x), \ldots, g_n(x), \ldots$$

raczionalis egész függvények sorozata, úgy hogy

$$\lim_{n=\infty} g_n(x) = f(x).$$

---

* L. Mathematische Encyklopädie. Bd. II. Heft. I. A. PRINGSHEINN czikkét.

Ez tüstént belátható. Legyen ugyanis

$$\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n, \ldots$$

a pozitiv számoknak 0-hoz konvergáló sorozata, akkor $\varphi_n(x)$-hez található egy $g_n(x)$ raczionalis egész függvény (a WEIERSTRASS-féle tétel értelmében), úgy hogy

$$|\varphi_n(x) - g_n(x)| < \delta_n,$$

ha csak

$$b \leqq x \leqq c$$

és akkor valóban

$$\lim_{n=\infty} g_n(x) = f(x).$$

Ha ugyanis x egy határozott hely (b, c)-ben, akkor a föltétel szerint ha csak $n > N_1$

$$|f(x) - \varphi_n(x)| < \delta,$$

hol δ tetszőleges kicsiny, előre megadott pozitiv szám. Ha továbbá $n > N_2$

$$\delta_n < \delta$$

és igy, ha $N > N_1, N_2$, akkor

$$|f(x) - g_n(x)| < 2\delta$$

valahányszor $n > N$. E szerint

$$\lim_{n=\infty} g_n(x) = f(x)$$

és igy lemmánk ki van mutatva.

Mint legelső alkalmazást tárgyaljuk a következőt:

Legyen $\Phi(x)$ a (b, c) véges számköz minden helyén folytonos, kivéve a köz egyetlen belső helyén, a p helyen, a hol a függvény viselkedésére nézve *semmi* megszorítást sem teszünk.* Legyen továbbá $\Phi(p) = P$.

Azt állitjuk, hogy létezik a (b, c) számköz minden helyén folytonos

* Φ-nek lehet tehát a p helyen másodfajú szakadása, felvehet a p hely környezetében tetszőleges nagy értékeket stb.

$$\varphi_1(x),\ \varphi_2(x), \ldots \varphi_n(x), \ldots$$

függvények sorozata, úgy hogy

$$\lim_{n=\infty} \varphi_n(x) = \Phi(x),$$

ha

$$b \leqq x \leqq c.$$

E végből $\varphi_n(x)$-et a következőképen definiáljuk:

Legyen

$$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n, \ldots$$

a pozitiv számoknak 0-hoz konvergáló sorozata, (úgy hogy $\varepsilon_i < p-b,\ p-c,\ i=1, 2, \ldots \infty$), akkor $\varphi_n(x)$-et következőképen definiálhatjuk:

Legyen $\varphi_n(x) = \Phi(x)$ ha $b \leqq x \leqq p-\varepsilon_n$

$$\begin{vmatrix} x & \varphi_n(x) & 1 \\ p-\varepsilon_n & \Phi(p-\varepsilon_n) & 1 \\ p & \Phi(p) & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{ha} \quad p-\varepsilon_n \leqq x \leqq p$$

$$\begin{vmatrix} x & \varphi_n(x) & 1 \\ p & \Phi(p) & 1 \\ p+\varepsilon_n & \Phi(p+\varepsilon_n) & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{ha} \quad p \leqq x \leqq p+\varepsilon$$

és ismét

$$\varphi_n(x) = \Phi(x) \quad \text{ha} \quad p+\varepsilon_n \leqq x \leqq c.$$

A geometriai képben (ha ilyen egyáltalában létezhetik), tehát $\varphi_n(x)$-nek olyan görbe felel meg, mely a $(b, p-\varepsilon_n)$, $(p+\varepsilon_n, c)$ közökben a $\Phi(x)$ görbével esik össze, a $(p-\varepsilon_n, p)$ közben egy egyenes vonalból áll, mely a $(p-\varepsilon_n, \Phi(p-\varepsilon_n))$ és $(p, \Phi(p))$ koordinátájú pontokat köti össze, a $(p, p+\varepsilon_n)$ közben pedig olyan egyenes vonalból áll, mely a $(p, \Phi(p))$, $(p+\varepsilon_n, \Phi(p+\varepsilon_n))$ koordinátájú pontokat köti össze stb.

$\varphi_n(x)$ egyértékű, a (b, c) számköz minden helyén folytonos függvény. Könnyen belátható, hogy

$$\lim_{n=\infty} \varphi_n(x) = \Phi(x).$$

A p helyen ez világos, mert

$$\varphi_1(p) = \varphi_2(p) = \cdots = \varphi_n(p) = \cdots = P = \Phi(p).$$

Ha pedig $x \gtreqless p$ akkor, ha csak $n > N$, az x a $(p-\varepsilon_n, p+\varepsilon_n)$ számközön *kívül* esik, és így

$$\varphi_n(x) = \Phi(x),$$

ha $n > N$ stb.

De most lemmánk értelmében létezik a

$$g_1(x), g_2(x), \ldots, g_n(x), \ldots$$

raczionális egész függvények sorozata, úgy hogy

$$\lim_{n=\infty} g_n(x) = \Phi(x)$$

minden a (b, c) számközben fekvő x helyre nézve, és így

$$\Phi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} P_n(x), \quad (b \leqq x \leqq c)$$

hol $P_n(x)$ raczionális egész függvény és kiemeljük, hogy e függvénysor *minden egyes* szóban forgó x helyen a megfelelő $\Phi(x)$ függvényértéket adja.*

Ezt a módszert végesszámú p hely esetére kiterjesztve mondhatjuk:

Ha $\Phi(x)$ a (b, c) számközben a $p_1, p_2, \ldots, p_n$ helyek kivételével folytonos (de ezeken tetszőleges viselkedésű lehet), akkor e függvény raczionális egész függvények szerint haladó függvénysorba fejthető, mely a (b, c) köz minden helyén pontosan megadja a $\Phi(x)$ függvényértéket.

Legyen most végre

$$p_1, p_2, \ldots, p_n, \ldots$$

a (b, c) számközben foglalt helyeknek egy megszámlálható sokasága, mely «mindenütt sűrűen» is lehet elosztva. Legyen (b, c)-ben egy $f(x)$ függvény következőképen értelmezve:

$$f(x) = F(x),$$

* Világos, hogy a FOURIER-féle sor [akár összetartó, akár summabilis] erre a czélra nem volna alkalmazható, mert ha pl. p-ben elsőfajú szakadás van, akkor minden esetben az $\frac{1}{2}[\Phi(p+0)+\Phi(p-0)]$ határértéket, tehát általában *nem* $\Phi(p)$-t kapjuk a sor értéke gyanánt a p helyen.

ha

$$x \gtrless p_\nu, \quad (\nu=1, 2, \ldots, \infty)$$

hol $F(x)$ egy (b, c)-ben mindenütt *folytonos* függvény, és

$$f(p_\nu) = P_\nu, \quad (\nu=1, 2, \ldots, \infty)$$

hol

$$P_1, P_2, \ldots, P_\nu, \ldots$$

tetszőleges számok.

(Ezen igen általános függvényosztályba tartozik, pl. az ú. n. DIRICHLET-féle függvény is, melynél

$$f(x) = a \quad \text{ha } x \text{ irraczionális}$$
$$f(x) = b \quad \text{ha } x \text{ raczionális}$$

és $a \gtrless b$.)

Legyen most egy $\Phi_n(x)$ függvény a (b, c) számközben következőképen értelmezve:

$$\Phi_n(p_1) = P_1$$
$$\Phi_n(p_2) = P_2$$
$$\vdots$$
$$\Phi_n(p_n) = P_n$$

és

$$\Phi_n(x) = F(x),$$

ha x a $p_1, p_2, \ldots, p_n$ számoktól különböző.

Ilyen módon egy olyan

$$\Phi_1(x), \Phi_2(x), \ldots, \Phi_n(x), \ldots$$

függvénysorozat képezésére adtuk meg a törvényt, melyre nézve

$$\lim_{n=\infty} \Phi_n(x) = f(x).$$

Tehát

$$f(x) = \Phi_1(x) + [\Phi_2(x) - \Phi_1(x)] + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \Psi_n(x),$$

hol a Ψ-k a Φ függvények jellegével bírnak. E szerint

$$\Psi_n(x) = \sum_{\nu=1}^{\infty} P_{n\nu}(x),$$

hol $P_{n\nu}(x)$ raczionális egész függvény, és végre

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{\nu=1}^{\infty} P_{n\nu}(x).$$

Tehát a jellemzett függvényosztályba tartozó függvények raczionális egész függvények szerint haladó, kétszeresen végtelen sorba fejthetők. E függvények tehát az Euler-féle értelemben analytikai függvények (jóllehet, hogy általában nem integrálhatók, egy helyen sem folytonosak stb.). Súlyt helyezünk arra, hogy ezt minden számítás nélkül láttuk be.*

Fejér Lipót.

* A Dirichlet-féle függvényre nézve l. Pascal, Esercizi 4. l.

A BOLTWOOD-FÉLE MÓDOSÍTOTT HIGANYLÉG-SZIVATTYÚ.

Higanylégszivattyú szerkesztésével sokan foglalkoztak. Többé-kevésbé jó szerkezetek tétettek közzé, melyek — mint nem is lehet másként — mind a TORRICELLI-féle üres tér előállításán alapulnak. Az elv tudvalevőleg mindig az, hogy a TORRICELLI-féle üres tér könnyen előállítható legyen, melybe a levegő a kiszivattyuzandó edényből tódulhasson és onnan ismét kitolathassék.

Talán az első ilyen légszivattyú a POGGENDORFFÉ. Ez egy öblös, erős falú golyós tölcsércső, mely az alatta álló, szintén erős falú palaczkokba van beköszörülve és csöve a palaczk fenekéig ér. A golyó felső nyilására kétszer átfúrt csap van ragasztva, melynek révén a golyó belseje majd a külső levegővel, majd a kiszivattyúzandó edénynyel hozható közlekedésbe. Ha a palaczkból a levegőt közönséges légszivattyúval kiszivattyúzzuk, a higany a golyóból a palaczkba sülyed és a golyóban TORRICELLI-féle üres tér keletkezik. A csap megfelelő állításával a levegőt a kiszivattyúzandó edényből a golyóba bocsátjuk s most a csapot elfordítván, a golyóból szivattyúzzuk ki a bele tódult levegőt. E közben a higany a palaczkból ismét a golyóba emelkedik s most a művelet ismét előlről kezdhető.

GEISSLER szivattyúja abban különbözik POGGENDORFFétól, hogy GEISSLER a golyóra a barometerállásnál hosszabb csövet forrasztott és ezt megfelelő hosszuságú kaucsukcsővel a higanytartó edénynyel kötötte össze. Ha ez utóbbit elég magasra emeljük, a higany a golyóba emelkedik és belőle a levegőt a nyitott csapon át kiszorítja. A csapot bezárva és a higanytartót ismét leeresztve, a golyóban légüres tér támad, melybe a levegő a kiszivattyúzandó edényből a csap megfelelő állítása után beáramlik és innen ismét kitolható.

TÖPLER szivattyúja csak abban különbözik GEISSLERétől, hogy ez utóbbin lévő két csap, melyek egyike a recipienst a TORRICELLI-féle térrel közlekedteti, a másik pedig a recipiensből a TORRICELLI-féle térbe tódult levegőnek kitolasát teszi lehetővé, két barometercsővel van helyettesítve. E szivattyún tehát csap nincs, hanem az illető közlekedési irányokat a kellő időpontban higany zárja és nyitja.

A hetvenes években olyan szivattyút szerkesztettem, melyben a POGGENDORFF-féle és TÖPLER-féle elv volt kombinálva. A szivattyú ugyanis csapnélküli volt és a higany felemelését és lebocsátását a külső levegő nyomása végezte, melynek szabályozására az időközben használatba került vízlégszivattyú szolgált. E szivattyúnak az volt a baja, hogy mikor működött, mellette kellett állani és a vízlégszivattyúval közlekedő csapokat folytonosan megfelelően állítani. Ugyan ebben az időben SCHULLER ugyanezen elvet alkalmazta, de a TÖPLER-féle barometercsöveket elmés szerkezetű szeleppel helyettesítette és a vízlégszívattyúhoz szolgáló csap megfelelő állítását automatikussá tette.

Hosszadalmas lenne az azóta közzétett különböző, többé-kevésbé jó szerkezeteket ismertetni. Van azonban közöttük egy, a mely közzétételekor (1897-ben) azonnal felköltötte érdeklődésemet. Ez a BOLTWOOD-féle higany-légszivattyú, mely valamennyi eddigi szerkezet között a legjobbnak látszik előttem. Abban az időben, mikor a szivattyú leírása közzé tétetett, mindjárt tettem vele kisérletet és pedig nagyon kielégítő eredménynyel.

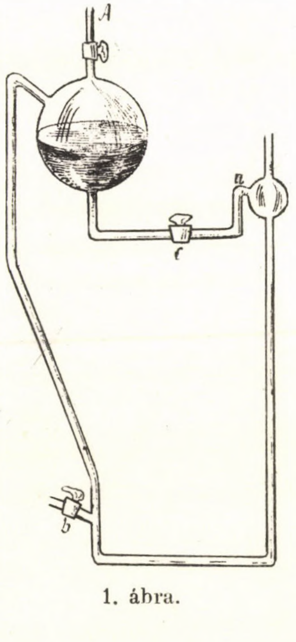
Társulatunk elnöke is érdeklődött e szivattyú iránt s miután annak működéséről a nálam lévő, magam összeállította példányon meggyőződött, dr. KISS KÁROLYlyal a fizikai intézet részére csináltatott egy ilyen szivattyút és a szivattyú ott is bevált.

Már régebben az u. n. radioaktiv testek tanulmányozásával foglalkoznak sokan, közöttük én is és e vizsgálatok körébe bele akarom vonni a kathodsugarak és a Röntgen-sugarak hatását is a testek sugárzására. E czélra jó higany-légszivattyúra van szükség, melynek önműködőnek kell lennie és a mellett gyorsan dolgoznia. A BOLTWOOD-féle szivattyú ilyennek igérkezett s a körüle szerzett tapasztalatok arra inditottak, hogy rajta némi módositást alkalmazzak. Ugyanezt mondhatom a Röntgen-csövekről. A kereskedésből szerzett ilyen csövek köztudomás szerint könnyen megromlanak, ha őket egy kissé megerőltetjük. A megromlás oka kétféle: vagy nem voltak a csövek kellő gonddal kiszivattyúzva és ennélfogva használatkor az üveghez és fémpólusokhoz tapadt levegő (vagy egyéb illó testek) lassankint elpárolognak és a vacuumot csökkentik elannyira, hogy kathodsugarak (tehát Röntgen-sugarak sem) nem keletkeznek; vagy a csőben foglalt minimális levegőt a polusok a cső működése közben elnyelik és a vacuum anynyira fokozódik, hogy az áramnak nagy ellentállást okoz. Mellesleg megjegyzem, hogy ez utóbbi esetet én részemről nem tapasztaltam.

Ezekről a légszivattyún és Röntgen-csöveken tett csekély módosításokról kivánok a t. társulatnak beszámolni azon okból, mert nem lehetetlen, hogy tapasztalataimat mások is értékesíthetik.

A Boltwood-féle légszivattyú ugyanazon elv szerint van szerkesztve, mint a Sprengel-féle szivattyú. Ez tudvalevőleg körülbelől 1 méter hosszú 1—1·5 mm. belső átmérőjű üvegcsőből áll, melynek felső végére a higanyt tartalmazó tágas, csapos tölcsér van illesztve, alsó, nyitott vége pedig higany alá ér. Ha a tölcsérből a higanyt cseppenként bocsátjuk az üvegcsőbe, minden egyes higanycsepp leesése közben a maga előtt lévő levegőt a csőből kitolja és a szakadatlanul egymásra következő cseppek mögött hamar előáll a Torricelli-tér. Ha a capilláris cső e helyén oldalcsövet alkalmazunk, mely a Torricelli-tért a recipienssel köti össze, akkor ez utóbbiból a levegőt kiszivattyúzhatjuk. Az e közben lecsepegett higanyt időnként újból a tölcsérbe kell öntenünk, hogy a szivattyú szakadatlanul működhessék.

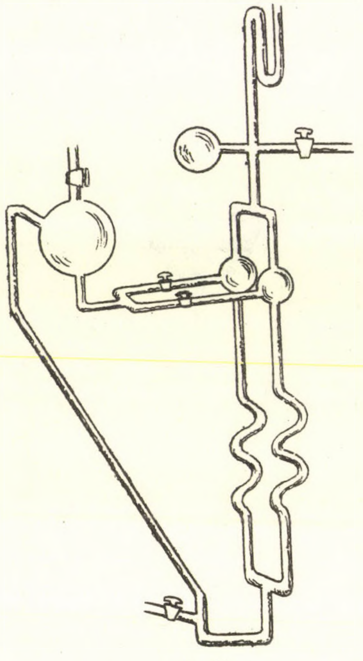
Boltwood a Sprengel-féle szivattyút vizlégszivattyúval kombinálta. A Sprengel-szivattyú 1 m. hosszú csövét 40—50 cm.-re szabta. A csőbe *a*-nál cseppenként hull a higany s lent a hajlásban gyülik össze. Ha a *b* csapot óvatosan megnyitjuk annyira, hogy rajta kevés levegő juthasson a csőbe, akkor a higanyt a külső levegő nyomása feltolja a tartóba, mert ez *A*-nál a vizlégszivattyúval lévén összekötve, benne a nyomás igen alacsony. A *c* csapot úgy állítjuk, hogy a higany cseppenként essék a Sprengel-csőbe: a *b* csapot pedig úgy, hogy az a higany, a mely lefolyik, épen elegendő gyorsasággal visszaszállíttassék a tartóba. Ha *b*-nél nagyon kevés levegőt bocsátunk be, akkor megtelik a Sprengel-cső higanynyal: ha pedig nagyon is sok levegő jut be, akkor a vízszivattyú nem tudja a higanytartó edényben a nyomást kellőleg csökkenteni és megeshetik, hogy a levegő a Sprengel-csövön vissza, azaz fölfelé tolja a higanyt. Nagyon könnyű azonban a két *c* és *b* csapot megfelelően beállítani s akkor a szivattyú szakadatlanul, szabályosan dolgozik és bátran felügyelet nélkül hagyható.



1. ábra.

A szivattyúnak az eddigi szerkezetek fölött sok előnye van. Szerkezete igen egyszerű és ennélfogva igen olcsó; ha törik rajta valami, magunk megjavíthatjuk, föltéve, hogy az üvegfúvás mesterségéhez némileg értünk. A szivattyú kevés higanynyal dolgozik és a mi a fő: nincs kártékony tér a szerkezetben. A legnagyobb előnye azonban az, hogy más szerkezetekhez képest igen gyorsan dolgozik és igen nagy ritkítást érhetünk el vele. Vannak azonban hátrányai is. A legnagyobb talán az, hogy a Sprengel-cső el-elpattan. Ez onnan van, hogy az igen nagy fokú ritkítás mellett a leeső higanycseppek közé nem jut már elég levegő; ennek következtében a cseppek a cső aljában álló higanyra esnek és az ütközés oly heves, hogy a leeső higanycseppek csattogása hallatszik. Ez a folytonos rázkódás úgy látszik megváltoztatja az üveg molekuláris állapotát s a cső összerepedezik. A megrepedés okát ebben kell keresnünk, mert repedezés mindig azon a helyen mutatkozik, hol a higanycseppek ütközése történik. Nem előnyös az sem, hogy a szivattyú nem dolgozik olyan gyorsan, mint a hogy az szerkezeténél fogva dolgozhatnék. Ha ugyanis egy Sprengel-cső helyett kettőt, hármat alkalmazunk, akkor egyébként egyenlő körülmények között a szivattyú arányosan gyorsabban fog dolgozni.

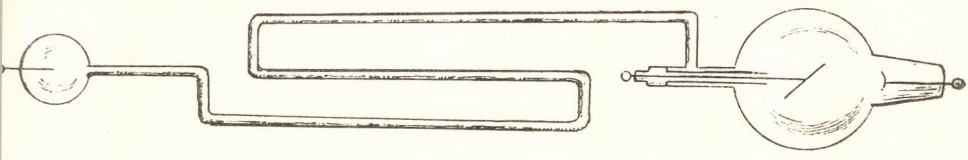
Különösen e két körülményre tekintettel, a szivattyúnak a mellékelt rajzban látható alakot adtam. A Sprengel-csövek kigyózólag vannak mghajlítva, a mi a higanycseppeknek az ütközését mérsékli és így a cső repedezését elhárítja; továbbá az egyik szivattyúmon két, a másikon négy Sprengel-cső van alkalmazva s a két szivattyú úgy van kombinálva, hogy vagy különkülön, vagy együttesen használható. A szivattyú négy Sprengelcsővel nem dolgozik sokkal gyorsabban, mint a kettős csövű. Ennek oka az, hogy mivel a higanynak a higanytartóba való felszállítása is csak szűk csőben történhetik, a négy Sprengelcsőbe lassabban kell a higanyt csepegtetni, hogy ideje legyen a higanytartóba felszállani. Az a cső, a melyen a higany a tartóba felszáll, nem lehet nagyon tág, mert akkor benne a higanycseppek visszagurulnak, s a vízszivattyú csak levegőt szína a csövön keresztül a nélkül, hogy a higanyt rendeltetése helyére szállítaná. Ez okból nem czélszerű a négyes csövű szivattyú; legjobb kettős csövű szivattyút használni és ilyent kettőt, hármat, sőt még többet is működtethetünk egy és ugyanazon vízszivattyúval.



2. ábra.

Az én szivattyuimmal, ha azok együttesen működnek, 1—1·5 liter térfogatú csöveket 3—4 óra alatt annyira ki lehet szivattyúzni, hogy a RÖNTGEN-féle súgarakat adják. Van egy csövem, a melynek a térfogata 2 liternél jóval nagyobb s ez mintegy 8 óra alatt készült el.

A Röntgen-csövön is tettem egy kis, szerintem előnyös módosítást. Abból indulva ki, hogy a csőben egyrészt a polusok távolságával a potentiálkülönbség növekszik és így minden egyes kisülés erősebb; másrészt, hogy ha a cső térfogata nagyobb, akkor a benne használatkor keletkező nyomásingadozások elmosódnak és észrevehetők nem lesznek, a Röntgen-csövet úgy szerkesztettem, hogy



3. ábra.

a szikraútja körülbelül 1·5 méter legyen. A cső szerkezete a mellékelt rajzból látható.

E csövek igen jóknak bizonyultak. A tőlük szolgáltatott Röntgen-sugarak úgy látszik sokkal intenzivebbek, mint a kereskedésből beszerzett csöveké.

Igaz ugyan, hogy a kereskedésből beszerzett csövek jósága — mint minden Röntgen-csőé — főképpen attól függ, hogy mily gonddal történt a kiszivattyúzás; de az is kétségtelen, hogy a csőben a polusok távolsága, sőt a cső alakja is befolyással van a cső működésére. Én a magam készitette csöveimet egy német szabadalmú csővel hasonlítottam össze. Az összehasonlítás csak qualitativ volt és abban állott, hogy a bariumplatincyanidos ernyőt mily távolságból teszik világítóvá a sugarak. Kitünt, hogy a német gyártmány 5·5 méter távolságból már nem adta meg az ernyö elé tartott kéz árnyékát, mig az én csövem 8 méterről még élénk árnyékott adott, s ha a helyiség, melyben a kisérlet történt, megengedte volna a nagyobb távolságot, még 8 méternél jóval meszszebben kellett volna menni, hogy ugyanaz a jelenség álljon elő, mint a kereskedésbeli csővel. Csöveimmel 15—20 másodpercz alatt a kéz csontvázának kifogástalan jó photogrammját lehet előállítani.

Mindezekből kitünik, hogy a szivattyú igen alkalmas kis eszköz és ott, a hol vízvezeték van, nagyon ajánlható alkalmazása.

Lengyel Béla.

GÖMBÖLYÜ VÉGÉVEL VÍZSZINTES LAPRA TÁMASZKODÓ SÚLYOS PÁLCZA MOZGÁSA.

(Harmadik és befejező közlemény.)

Ezzel meghatároztunk két P_1' és P_2' pontot, melyek kényszerpályájukhoz kötve úgy mozognak, mintha anyagi pontok volnának, ha bennök M tömeget konczentrálunk.

A (44) alatti egyenletből

$$m = \frac{l'-r}{l'+r}, \tag{47}$$

s így tekintetbe véve, hogy P' hurkolt, ill. nyújtott cycloison mozog, melynek minden pontjához F, mint a gördülő körnek az alappal való érintkezési pontja tartozik, akkor m mint a P' pont e ponttól való legkisebb és legnagyobb távolságának a viszonya állítható elő. Tehát m e tekintetben is némileg mértékül szolgál arra nézve, hogy a mozgás mennyiben tér el a közönséges, fix tengely körül forgó inga mozgásától.

Ha $r=0$, $m=1$ és a (46) egyenletekből

$$l_1' = 0$$
$$l_2' = \frac{k^2+l^2}{l}, \tag{48}$$

vagyis P_1' pont az inga forgáspontjának, P_2' az inga lengési középpontjának felel meg.

Ha $L=0$	$r=1$ cm	$l_1'=0{\cdot}29052$	$l_2'=3{\cdot}4420$
$L=100$ cm	$r=1$ cm	$l_1'=0{\cdot}016486$	$l_2'=60{\cdot}656$
$L=100$ cm	$r=0$	$l_1'=0{\cdot}000$	$l_2'=66{\cdot}666$ cm.

A szerkesztés a 4. ábra alapján világos.

Ha a lengésidő (25) képletébe l't bevezetjük lesz

$$T = \int_{\alpha}^{2\pi-\alpha} \sqrt{\frac{l'^2+r^2+2l'r\cos\varphi}{2gl'(\cos\alpha-\cos\varphi)}}\, d\varphi,$$

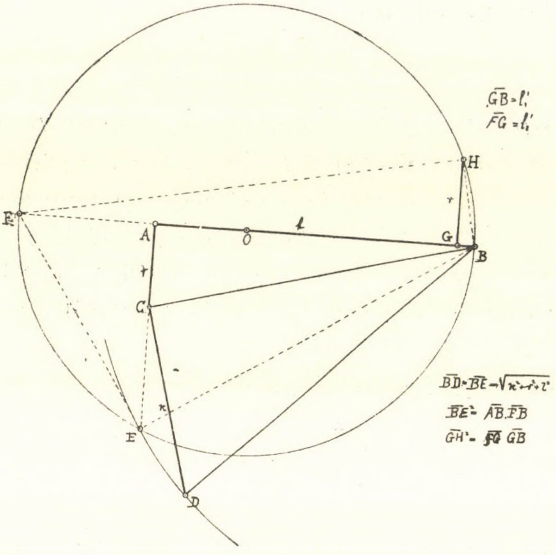
és ha

$$\rho_s'^2 = l'^2 + r^2 + 2l'r\cos\varphi,$$

akkor

$$T = \int_{\alpha}^{2\pi-\alpha} \sqrt{\frac{\rho_s'^2}{2l'g(\cos\alpha - \cos\varphi)}}\, d\varphi, \tag{49}$$

mely képlet egy hurkolt (nyújtott) cycloison mozgó anyagi pont lengésideje, ha a pálya valamely pontjának a gördülő kör és az alap érintkezési pontjából való távolsága ρ_s'.



4. ábra.

A (33) képlet szerint

$$T = \frac{2(l'-r)}{\sqrt{gl'}} \varDelta(\lambda)\, \Pi_0\left(h, k, \frac{\pi}{2}\right), \tag{50}$$

hol

$$h = k\sin\lambda, \qquad \cos\lambda = m,$$

$$k = \sin\psi_0, \qquad \operatorname{cotg}\psi_0 = m\operatorname{tg}\frac{a}{2}, \tag{51}$$

$$m = \frac{l'-r}{l'+r},$$

és $(l'-r)$ és $(l'+r)$ ρ_s' minimális és maximális értéke.

10. Azon feltevéssel, hogy a horizontális alapon csak csúszás nélküli gördülés lehetséges, a mozgás egy, az inga mozgásával analog, egyensúlyi helyzet körül teljesen előirt pályán való oscilláló mozgás jellegét öltötte és igy a V reakczió és S surlódó erő az inga forgáspontjában fellépő reakczió erő két komponensének felel meg.

A mozgás kezdő pillanatában, mivel $\frac{d\varphi}{dt} = 0$,

$$S = Ms = -M(r + l\cos\varphi)\frac{d^2\varphi}{dt^2},$$

$$V = Mv = Mg - Ml\sin\varphi\frac{d^2\varphi}{dt^2}, \tag{52}$$

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} = \frac{gl\sin\varphi}{k^2 + \rho_s^2},$$

hol φ helyébe α helyettesitendő.

Ha ρ_s szöge az Y vertikális tengelylyel ψ, tehát

$$\cos\psi = \frac{r + l\cos\varphi}{\rho_s},$$

$$\sin\psi = \frac{l\sin\varphi}{\rho_s}, \tag{53}$$

akkor

$$S = -M\rho_s\cos\psi\frac{d^2\varphi}{dt^2}$$

$$V = Mg - M\rho_s\sin\psi\frac{d^2\varphi}{dt^2}. \tag{54}$$

E kifejezések teljesen megegyeznek a közönséges ingánál fellépő reakczió-erő két komponensére nyert kifejezésekkel. Az S és V összetételéből eredő R erő hajlásszöge ρ_s irányával legyen ϑ, akkor

$$R\cos\vartheta = Mg\cos\psi,$$

$$R\sin\vartheta = Mg\sin\psi - M\rho_s\frac{d^2\varphi}{dt^2},$$

ebből

$$\operatorname{tg}\vartheta = \frac{Mg\sin\psi - M\rho_s\frac{d^2\varphi}{dt^2}}{Mg\cos\psi}$$

s minthogy

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2}=\frac{g\varrho_s \sin\psi}{\varrho_s^2+k^2},$$

úgy lesz végre

$$\operatorname{tg}\vartheta=\left(1-\frac{\varrho_s^2}{k^2+\varrho_s^2}\right)\operatorname{tg}\psi,$$

vagy

$$\operatorname{tg}\vartheta=\frac{k^2}{k^2+\varrho_s^2}\operatorname{tg}\psi. \tag{55}$$

E kifejezés — mely a reakczió erő irányát határozza meg a mozgás kezdeti pillanatában — szintén teljesen megegyezik azon kifejezéssel, melyet a közönséges inga tárgyalásánál levezetni szokásos.

Az R szöge a vertikálissal $\psi-\vartheta$. Tehát

$$\operatorname{tg}(\psi-\vartheta)=\frac{\operatorname{tg}\psi-\operatorname{tg}\vartheta}{1+\operatorname{tg}\psi\operatorname{tg}\vartheta}=\frac{\varrho_s^2\sin\psi\cos\psi}{\varrho_s^2\cos^2\psi+k^2}. \tag{56}$$

Tehát a surlódó erő viszonya a vertikális reakczió-erőhöz a kezdeti pillanatban

$$\frac{S}{V}=\frac{\varrho_s^2\sin\psi\cos\psi}{\varrho_s^2\cos^2\psi+k^2}. \tag{57}$$

11. Az eddig tárgyalt eset tulajdonképen határesetnek tekintendő. A surlódás nem minden esetben érhet el oly nagy értéket, hogy a csúszást teljesen megakadályozná. A másik határeset ezzel szemben az, midőn surlódás egyáltalában nincsen. Ekkor

$$\frac{d^2x_s}{dt^2}=0,$$

$$\frac{d^2y_s}{dt^2}=v-g, \tag{58}$$

$$k^2\frac{d^2\varphi}{dt^2}=vl\sin\varphi,$$

s a geometriai egyenlet

$$y_s=r+l\cos\varphi. \tag{59}$$

Minthogy $\frac{d^2x_s}{dt^2}=0$ és a kezdeti pillanatban $\frac{dx_s}{dt}=0$, x_s állandó a mozgás folyamán és így a súlypont vertikális egyenes vonalon mozog. Mivel így mint S, mint E pont mozgása egyenes vonalon, tehát előirt pályán történik, a (11) alatti egyenlet a (12) alatti mozgásegyenletek felhasználása nélkül, közvetlenül is felirható

$$d\left\{\tfrac{1}{2} M(k^2+\varrho_s^2)\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2\right\} = - Mg\, dy_s. \tag{60}$$

Minthogy

$$- dy_s = l \sin\varphi\, d\varphi,$$

úgy áll:

$$d\left\{\tfrac{1}{2} M(k^2+\varrho_s^2)\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2\right\} = Mgl \sin\varphi d\varphi, \tag{61}$$

és integrálva

$$\tfrac{1}{2} M(k^2+\varrho_s^2)\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 = Mgl(\cos a - \cos\varphi), \tag{61a}$$

feltévén, hogy ha

$$\varphi = a:$$

$$\frac{d\varphi}{dt} = 0.$$

A súlypont sebessége

$$\frac{dy_s}{dt} = - l \sin\varphi \frac{d\varphi}{dt},$$

s minthogy

$$\frac{d\varphi}{dt} = \sqrt{\frac{2gl(\cos a - \cos\varphi)}{k^2+\varrho_s^2}}, \tag{62}$$

$$\varrho_s^2 = l^2 \sin^2\varphi,$$

vagyis

$$\frac{d\varphi}{dt} = \sqrt{\frac{2gl(\cos a - \cos\varphi)}{k^2+l^2\sin^2\varphi}}, \tag{63}$$

úgy végre

$$\frac{dy_s}{dt} = - l \sin\varphi \sqrt{\frac{2gl(\cos a - \cos\varphi)}{k^2+l^2\sin^2\varphi}}.$$

Midőn a pálcza a földre ér, vagyis $\varphi = \frac{\pi}{2}$:

$$\frac{dy_s}{dt} = - l \sqrt{\frac{2gl\cos a}{k^2+l^2}}. \tag{64}$$

A súlypont $\varphi=a$-tól $\varphi = \frac{\pi}{2}$ helyzetig $l\cos a = h$ utat tett meg. Egy h magasságból eső test sebessége

$$v = -\sqrt{2gh}. \tag{65}$$

Ha tehát

$$\varepsilon = \frac{l}{\sqrt{k^2+l^2}}, \tag{66}$$

a pálcza súlypontja ε-szor akkora sebességgel bir, mikor a pálcza a horizontális lapra ér, mint az ugyanazon magasságból szabadon eső test, hol ε valódi tört. Ha $\frac{L}{r} = 10$, $\varepsilon = 0{\cdot}831$; $\frac{L}{r} = 100$, $\varepsilon = 0{\cdot}904$ és ha r végtelen kicsiny L-hez képest $\varepsilon = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Ha a pálcza mozgását nem korlátoljuk a horizontális alap alatti térben, lengés jő létre, miközben a súlypont egy vertikális egyenesben oscillál.

12. A mozgás lefolyását eddigelé két határesetben vizsgáltuk. Mechanikai vizsgálatoknál a szokásos feltevés az, hogy a surlódó erő arányos a nyomással, melyet az érintkező testek egymásra gyakorolnak. Ha tehát az arányossági tényező f, akkor

$$S = \pm f V. \tag{67}$$

E feltételt kombinálva a (12) alatti mozgásegyenletekkel, V-t kiküszöbölhetjük s ekkor a következő differencziálegyenletet nyerjük:

$$[k^2+l^2\sin^2\varphi \pm f l(r+l\cos\varphi)\sin\varphi]\frac{d^2\varphi}{dt^2} +$$
$$+ [l^2\sin\varphi\cos\varphi \pm f l\cos\varphi(r+l\cos\varphi)]\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 =$$
$$= g\big(l\sin\varphi \pm f(r+l\cos\varphi)\big), \tag{68}$$

és $u = \frac{1}{2}\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2$ helyettesitéssel, mivel $\frac{du}{d\varphi} = \frac{d^2\varphi}{dt^2}$, e differenciálegyenlet elsőrendűvé lesz:

$$\frac{du}{d\varphi} + 2\,\frac{l^2\sin\varphi\cos\varphi \pm f l\cos\varphi(r+l\cos\varphi)}{k^2+l^2\sin^2\varphi \pm f l(r+l\cos\varphi)\sin\varphi}\,u =$$
$$= g\,\frac{l\sin\varphi \pm f(r+l\cos\varphi)}{k^2+l^2\sin^2\varphi \pm f l(r+l\cos\varphi)\sin\varphi}.$$

Ha

$$\int_0^{\varphi} \frac{2\,[l^2 \sin\varphi \cos\varphi \pm f l \cos\varphi\,(r+l\cos\varphi)]}{k^2+l^2\sin^2\varphi \pm f l\,(r+l\cos\varphi)\sin\varphi}\, d\varphi = I_1(\varphi),$$

$$\int_0^{\varphi} \frac{g\,[l\sin\varphi \pm f(r+l\cos\varphi)]}{k^2+l^2\sin^2\varphi \pm f l\,(r+l\cos\varphi)\sin\varphi}\, e^{I_1(\varphi)} = I_2(\varphi), \tag{69}$$

akkor

$$e^{I_1(\varphi)}\, u = I_2(\varphi) - I_2(\alpha),$$

és

$$u = \tfrac{1}{2}\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 = \frac{I_2(\varphi) - I_2(\alpha)}{e^{I_1(\varphi)}}. \tag{70}$$

Ezzel a feladat quadraturákra van visszavezetve. Az esés idejét egy másodszori integrálás adja.

13. A (68) alatti differencziálegyenletben még f előjele külön meghatározást igényel. Azonfelül e differencziálegyenletet csak bizonyos megfontolás után lehet alkalmazni, mert a (67) alatti feltétel nem lehet mindig teljesítve.

A mozgásnál a testre három külső erő hat: a nehézségi erő, a vertikális reakczió erő és a surlódó erő. Ha dt idő alatt a φ szög $d\varphi$-vel változott, a minek x_s-ben dx_s és y_s-ben dy_s változása felel meg,

a nehézségi erő munkája $dL_1 = -Mg\,dy_s$
a reakczió erő munkája $dL_2 = V dy_s + Vl\sin\varphi\, d\varphi$
a surlódó erő munkája $dL_3 = S dx_s + S(r+l\cos\varphi)\, d\varphi$. (71)

A reakczió erő munkája, mivel $dy_s = -l\sin\varphi\, d\varphi$, $dL_2 = 0$.

A surlódó erő nem növelheti a test eleven erejét és így kell, hogy munkája állandóan negativ, vagy zérus legyen:

$$dL_3 \leqq 0. \tag{72}$$

Minthogy a sík lappal érintkező pont elmozdulása, ha φ $d\varphi$-vel és x_s dx_s-vel változott

$$dx = dx_s + (r+l\cos\varphi)\, d\varphi, \tag{73}$$

vagyis

$$dL_3 = S dx. \tag{74}$$

Ha tehát $dx \gtreqless 0$, S előjele ellenkező dx előjelével s ezzel f előjele mindazon pillanatokra, melyekben $d\bar{x}$ a zérustól különbözik meg van állapitva. Mind e pillanatokra

$$dL_3 < 0.$$

Megjegyezzük, hogy a két határesetben, ha a mozgás gördüléssel és ha surlódás nélkül történik, állandóan $dL_3=0$, mivel ha csúszás nincsen $d\bar{x}=0$, és ha surlódás nincsen $S=0$.

Különös figyelmet tehát az általános esetben is azon időpontok érdemelnek, midőn

$$d\bar{x}=dx_s+(r+l\cos\varphi)\,d\varphi=0.$$

Ezen eset áll be mindenek előtt a mozgás kezdeti pillanatában, mivel ekkor $dx_s=0$, $d\varphi=0$.

E pillanatban, mivel dL_3 nem lehet 0-nál nagyobb, kell hogy $d^2L_3 \leqq 0$ legyen. De e pillanatban

$$d^2L_3=S\left(d^2x_s+(r+l\cos\varphi)\,d^2\varphi\right)$$

mivel

$$dx_s+(r+l\cos\varphi)\,d\varphi=0.$$

E szerint a mozgás kezdeti pillanatában kell hogy

$$|s|=\left|\frac{d^2x_s}{dt^2}\right| \leqq \left|(r+l\cos\alpha)\frac{d^2\varphi}{dt^2}\right|. \qquad (75)$$

Gördülés esetén a kezdeti pillanatban

$$s=-(r+l\cos\alpha)\frac{d^2\varphi}{dt^2}, \qquad (76)$$

vagyis mivel gördülésnél S és V eredője a vertikálissal $\psi-\vartheta$ szöget zár be

$$s=-(r+l\cos\alpha)\frac{d^2\varphi}{dt^2}=v\,\mathrm{tg}\,(\psi-\vartheta). \qquad (77)$$

E szerint, mivel a (75) egyenlet szerint

$$|s|<\left|(r+l\cos\alpha)\frac{d^2\varphi}{dt^2}\right|,$$

az $s=\pm fv$ feltétel csak úgy állhat fenn, ha

$$f \leqq |\mathrm{tg}\,(\psi-\vartheta)|.$$

Mivel

$$\operatorname{tg}(\psi-\vartheta)=\frac{\varrho_s^2\sin\psi\cos\psi}{\varrho_s^2\cos^2\psi+k^2},$$

úgy végre

$$f\leqq\left|\frac{\varrho_s^2\sin\psi\cos\psi}{\varrho_s^2\cos^2\psi+k^2}\right|. \tag{78}$$

Ha ezen egyenlőtlenség nincs kielégitve, $s=\pm fv$ feltétel nem állhat fenn s a mozgás gördüléssel indul meg. A gördülés addig tart, míg nem

$$f\geqq\frac{s}{v},$$

hol a (17) egyenletek szerint

$$s=-(r+l\cos\varphi)\frac{d^2\varphi}{dt^2}+l\sin\varphi\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2,$$

$$v=g-l\sin\varphi\frac{d^2\varphi}{dt^2}-l\cos\varphi\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2,$$

és $\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2$, $\frac{d^2\varphi}{dt^2}$ a (22) és (24) egyenletekből vannak meghatározva.

A kezdő pillanaton kívül előfordulhat mozgás közben is, hogy

$$d\bar{x}\equiv dx_s+(r+l\cos\varphi)d\varphi=0,$$

vagyis

$$dL_3=0.$$

Ekkor (kizárva az $S=0$ esetet, két eset lehetséges:

$$d^2L_3=0 \quad \text{és} \quad d^2L_3>0.$$

A $d^2L_3<0$ esete ki van zárva, mivel ez azt követelné, hogy dL_3 valamely előző pillanatban 0-nál nagyobb értékkel birjon.

a) Ha

$$d^2L_3\equiv S(d^2x_s+(r+l\cos\varphi)d^2\varphi-l\sin\varphi\, d\varphi^2)=0,$$

képeznünk kell a következő d^3L_3, $d^4L_3\ldots$ differencziálokat és ezekbe a d^2x_s, $d^3x_s\ldots$ valamint a $d^2\varphi$, $d^3\varphi\ldots$ differencziáloknak a (68) differencziálegyenletnek megfelelő értékeit behelyettesitjük.

Ha ez esetben az első 0-tól külömböző differencziál páratlan rendű, dL_3 elérte a vizsgált pillanatban szélső értékét és így ellenmondás nincsen, ha azonban ez páros rendű, ellenmondásra jutunk a (72) feltétellel, mely ellenmondást úgy kell kiküszöbölnünk, hogy a surlódási együttható előjelét megváltoztatjuk.*

b) Ha

$$d^2L_3 \equiv S\left(d^2x_s + (r + l\cos\varphi)\,d^2\varphi - l\sin\varphi\, d\varphi^2\right) > 0,$$

ugyanezen eset áll be és f előjelét meg kell változtatnunk, nehogy egy következő pillanatban S és $\overline{dx}$ egyenlő előjelüek legyenek.

A *b)* eset és az *a)* eset második alesete a mozgás oly pillanatainak felelnek meg, melyek azt szakaszokra bontják. Egy ily pillanat előtt és után f előjele ellenkező, vagyis minden szakaszra a (68) alatti differencziálegyenletet külön kell alkalmazni, f-nek más és más előjelet adva. Azon időpontok meghatározása azonban, hol f előjelét változtatja, igen nagy számítási nehézségekbe ütköznék.

Kármán Tivadar.

---

* Gördülés esetén az összes dL_3, d^2L_3, d^3L_3... differencziálok eltünnek.

A SÁROSPATAKI FŐISKOLA FIZIKAI MUZEUMA A XVIII. SZÁZAD VÉGÉN.

(Második közlemény.)

Instrumenta Hydraulica.

1. Cochlea Archimedis.
2.*Sipho vitreus incurvus, sive Diabetes.
3.*Syrinx vitrea cum embolo vitreo viridi.
4.*Syringes incurvatæ No. 2. cum embolis.
5. Apparatus æenei pro dimetiendis viribus per latera vasorum. Constat hic apparatus: *a)* e tubo cupreo incurvato, *b)* 4 cochleis, *c)* ex uno epistomio æneo minori. N. b. Hi apparatus e Hollandia cum ceteris Instto per Cl. Paul Szathmári allati.
6. Machina hydraulica celebris.

Hydraulikai készülékek.

1. Archimedes csavarja.
2.*Görbe szivornya üvegből.
3.*Üveg-szivócső üveg-dugattyúval.
4.*Két görbe szivócső dugattyúval.
5. Rézeszközök az edények oldalán kiömlő folyadék erejének mérésére. Állanak pedig ezek: görbe rézcsőből, 4 csigából, 1 kisebb dugattyúból (Gravesande-féle). Ezeket, több más eszközzel, Szathmári Pál hozta Hollandiából.*
6. Kitünő hydraulikus gép.

---

* Szathmári Pál a sárospataki főiskola tanára volt 1759-től 1766-ig.

Instrumenta Aerometrica.

1. Antlia Sengverdiana, cui accedunt *a)* Discus æneus, *b)* Hemisphæria Magdeburgica, *c)* Fons artificialis æneus, et ad hunc applicabiles fistulæ æneæ, *d)* Forcipes ferrei, *e)* Conus p. frangendis planis vitreis.

2. Antlia Gravesandiana, ad quam pertinent Insttrtta sequia. usque Nrum 16 inclusive.

3. Hemisphæria Magdeburgica.

4. Campanæ vitreæ, clausæ quidem 5, apertæ 2. N. b. una ex his posterioribus ad dstrndum simultaneum auri et plumulæ in vacuo delapsum inserviens, comparata est per me.

5. Index Mercurialis, qui Antliæ Grav. applicatur ad cognoscendam quantitatem relativam æris e campana jam exhausti.

6. Lagenula vitrea, Mercurium continens, instructa orificio æneo, cui accedit sipho vitreus cochlea, quæ orificis lagenulæ solet inseri.

7. Pocula brevia crystallina No. 2.

8. Pocula cylindrica, longiora, variorum luminum No. 4.

Aerometrikai eszközök.

1. Sengverd szerint javított légszivattyú, a melyhez a következők tartoznak: réztányér, magdeburgi féltekék, mesterséges szökőkút rézből s erre alkalmazható rézcsövek, vascsavarok, kúp üveglapok töréséhez.

2. Gravesande szerint javított légszivattyú, bezárólag a 16. számig felsorolt készülékekkel.

3. Magdeburgi féltekék.

4. Üvegburák, 5 zárt, 2 nyitott. Az utóbbiak közül azt, a melyik a vakuumban az arany és a pehely egyenlő esési idejének bemutatására szolgál, én szereztem.

5. Higanyos manometer.

6. Rezes szájú üvegpalaczk higanynyal, üvegcsővel és a palaczk szájához erősíthető csavarral.

7. Két törpe kristály-pohár.

8. Négy hosszabb, szines cylindricus pohár.

9.*Poculum cum fundo ligneo a pducendam Pluviam mercurialem inserviens.

10.*Syrinx ænea cum embolo, quæ inferius ad discum Antliæ firmari ptt.

11.*Pila Heronis, quam ipse ego construxi.

12. Cucurbita crystallina cum pede cupreo, miscendis in vacuo certis liquoribus inserviens.

13. Apparatus æneus ad pducendos vapores elasticos in vacuo.

14.*Catinulus ferreus, tripodi ferreo insistens, ad accendendum pulverem in vacuo.

15. Forcipes æneæ, quibus cochleæ eorum apparatuum ad Antliam Graves. pertinentium, item pixidis, follisque hydrostaticæ firmari et relaxari possunt.

16. Spiracula ænea 2, sive tubi, quor. minor ordinarie ad Antliæ discum firmatur, alter longior adhibetur in illis Exprttis, in quibus fons in vacuo produci solet.

17.*Barometra duo, unum lucidum, alterum vulgare.

18.*Barometrum portatile, dono mihi missum a Clar. Sam. Hollmanno Göttinga ao. 1776 et a me vicissim Museo Physico donatum.

19. Conus truncatus æneus alter, pro diffrigendis planis

9.*Pohár fafenékkel, higanyeső előállítására.

10. Rézcső dugattyúval, mely alant a légszivattyú tányérjához erősíthető.

11.*Heró labdája. Magam készítettem.

12. Gömb alakú kristályedények a vakuumban bizonyos folyadékok összevegyítésére.

13. Réz-készülék a vakuumban rugalmas gőzök előállítására.

14. Vas-csésze a vakuumban por-alakú testek meggyujtásához.

15. Rézcsavarok különböző czélokra.

16. Két fémcső. A rövidebb rendesen a légszivattyú tányérjához erősíttetik, a hosszabb pedig a vakuumban a szökőkút produkálásakor használtatik.

17.*Két barometer; az egyik kiváló, a másik közönséges.

18.*Szállítható barometer. Ajándékba kaptam Göttingából 1776-ban Hollmann Sámueltől, én viszont a fiz. múzeumnak ajándékoztam.

19. Egy másik fémből való csonka kúp üveglapok töréséhez. Van egyne-

vitreis. Adsunt etiam aliquot talia plana vitrea, quæ in officina vitriaria Radványiensi paranda curavi Ao. 1774.

20. Tintinnabulum æneum, ad dstrandum impossibilitatem soni in vacuo.

21. Hygrometrum æneum.

Instrumenta Optica.

1. Camera Obscura.

2. Laterna Magica cum 18 Imaginibus ad tabulas vitreas pictis.

3.*Microscopium simplex manuale.

4.*Microscopium simplex Hoockii cum lente et speculo illuminante, ad hoc pertinet cistula lignea, in qua varii apparatus Microscopici continentur.

5.*Microscopium Solare præstantissimum.

6.*Microscopium Anglicanum sub coperculo pyramidali vitreo.

7.*Tubus Terrestris Dollondi, 5 lentibus ocularibus instructus.

8. Microscopium simplex, speculo illuminante.

hány olyan üveglap is, melyeket 1774-ben a radványi üveggyárból szereztem.

20. Réz-csengettyű, demonstrálására annak, hogy a hang a vakuumban nem terjed.

21. Fém-hygrometer.

Optikai eszközök.

1. Sötét kamara.

2. Bűvös kamara, 18 üveglapra festett képpel.

3.*Egyszerű, kézi mikroskop.

4. Hooke-féle egyszerű mikroskop, megvilágító lencsével és tükörrel s több mikroskopiai készülékkel.

5.*Igen jó nap-mikroskop.

6.*Angol mikroskop, üvegfedél alatt.

7.*Dollond-féle földi távcső 5 okulár-lencsével.

8. Egyszerű mikroskop megvilágító tükörrel.

Ellend József.

AZ EGYMÁSRA KÖVETKEZŐ EGÉSZ SZÁMOK HATVÁNYÖSSZEGEINEK MEGHATÁROZÁSA.*

Bevezetés.

Ismeretes, hogy a BERNOULLI-féle számokra az egymásra következő egész számok hatványösszegeinek meghatározásánál akadtak legelőször. BERNOULLI JAKAB «Ars conjectandi» czímü munkájában minden bebizonyítás nélkül az említett összegek meghatározására, a következő képletet adja:

$$\sum n^c = \frac{n^{c+1}}{c+1} + \frac{n^c}{2} + \frac{c}{2} A n^{c-1} + \frac{c}{4}\binom{c}{3} B n^{c-3} +$$
$$+ \frac{1}{6}\binom{c}{5} C n^{c-5} + \cdots,$$

a melyben a baloldalon álló összeg kiterjed az összes egész számokra 1-től n-ig; c valamely pozitiv egész szám, $A, B, C, \ldots$ együtthatók pedig a BERNOULLI-féle számok. Jelöljük az egymásra következő BERNOULLI-féle számokat

$$B_1, B_2, \ldots, B_n\text{-nel}$$

s írjuk az előbbi sorkifejezést a következő alakban

$$\frac{n^{c+1}}{c+1} + \frac{n^c}{2} + \frac{1}{2}\binom{c}{1} B_1 n^{c-1} + \frac{1}{3}\binom{c}{2} B_2 n^{c-2} + \frac{1}{4}\binom{c}{3} B_3 n^{c-3} + \cdots,$$

akkor ezeknek a számoknak három alapvető tulajdonságát következőképen mondhatjuk ki:

---

* Bemutatva a magyar tudományos Akadémia III. osztályának 1901. január 21-én tartott ülésén.

1. *a* B_1, B_2 ... *számok n és c-től független számértékek;*

2. *a páros mutatóval biró együtthatók mindannyian zérussal egyenlők;*

3. *a páratlan mutatóval biró együtthatók váltakozó előjelűek.*

Ezeket a tulajdonságokat, valamint a formulát egész általánosságában EULER bizonyította be legelőször és pedig transcendens függvények segítségével.* Kétségtelen azonban, hogy mindeme tulajdonságoknak:

$$s_n = 1^n + 2^n + \dots + (m-1)^n$$

egyenletből, mely legelőször vezetett a BERNOULLI-féle számokra és mely azokat úgyszólván definiálja, is ki kell adódniok. Hogy a transcendens függvények alkalmazását mellőzzék, a hatványösszegek meghatározására később az n-ed rendű számtani haladványok alapképleteit vették alkalmazásba.** Kétségtelen azonban, hogy

$$s_n = 1 + 2^n + 3^n + \dots + (m-1)^n$$

összegnek m-ben kifejezett értékét idegen elemek fölhasználása nélkül, pusztán az előbb fölírt egyenlet transzformácziójából is meg kell határozhatnunk. Ez valóban sikerül is. Sőt ily módon nem csak s_n értékét határozhatjuk meg, hanem egyszersmind levezethetjük a BERNOULLI-féle számok tulajdonságait megállapitó mindamaz egyenleteket, a melyeket EULER transcendens függvények sorbafejtéséből kapott.

Induljunk ki

$$s_{n+1} = 1^{n+1} + 2^{n+1} + \dots + (m-1)^{n+1} \tag{1}$$

egyenletből.

Ha ezt a következő alakban írjuk

$$s_{n+1} = 1 + (1+1)^{n+1} + (1+2)^{n+1} + \dots + (1+m-1)^{n+1} - m^{n+1}$$

és a hatványozást végrehajtjuk, akkor

* Lásd: O. SCHLÖMILCH, Höhere Analysis. II. rész. «Die Bernoullischen Functionen» czímű fejezetét.

** Lásd: L. SAALSCHÜTZ, Vorlesungen über die Bernoullischen Zahlen. 1893. 1—9 old.

$$\binom{n+1}{1}s_1+\binom{n+1}{2}s_2+\cdots+\binom{n+1}{n}s_n=m(m^n-1) \tag{2}$$

egyenletre jutunk. Ha pedig s_{n+1}-et

$$s_{n+1}=(1-1)^{n+1}+(2-1)^{n+1}+(3-1)^{n+1}+\cdots+$$
$$+(m-1-1)^{n+1}+(m-1)^{n+1}$$

alakban írjuk és az utolsó tag kivételével a hatványozást minden tagban végrehajtjuk, akkor

$$\binom{n+1}{1}s_1-\binom{n+1}{2}s_2+\cdots+(-1)^{n-1}\binom{n+1}{n}s_n=$$
$$=m-1+(-1)^{n+1}(m-1)^{n+1} \tag{3}$$

egyenletet kapjuk. Ha a (2) alatt álló egyenletben n helyébe 1, 2, 3, ..., n értékeket helyettesítjük, az így nyert

$$\begin{aligned}
\binom{2}{1}s_1 &= m(m-1)\\
\binom{3}{1}s_1+\binom{3}{2}s_2 &= m(m^2-1)\\
\binom{4}{1}s_1+\binom{4}{2}s_2+\binom{4}{3}s_3 &= m(m^3-1) \qquad (4)\\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots &\cdots\cdots\\
\binom{n+1}{1}s_1+\binom{n+1}{2}s_2+\cdots+\binom{n+1}{n}s_n &= m(m^n-1)
\end{aligned}$$

egyenletrendszerből recursiv módon meghatározhatjuk s_1, s_2, s_3... összegeknek m-ben kifejezett értékét. De a (2) alatt álló egyenlet segítségével s_n-et $s_1, s_2, \ldots, s_{n-1}$ előzetes kiszámítása nélkül, independens módon is kifejezhetjük m függvényeként.

Mielőtt a részletes számításra áttérnénk, s_n-nek egynehány oly általános tulajdonságát fogjuk megállapítani, a melyekre a következőkben szükségünk lesz. A (4) alatt álló rendszer első egyenletéből következik, hogy s_1, m-nek másodfokú, másodikából, hogy s_2 m-nek harmadfokú, s í. t.; utolsó egyenletéből, hogy s_n m-nek $n+1$-ed fokú egész függvénye raczionális együtthatókkal. Hasonló módon kimutathatjuk, hogy s_n úgy $m=0$-ra, mint $m=1$-re eltünik.

s_n meghatározása legegyszerűbben a differencziálszámítás segítségével történik. A (2) alatt álló egyenlet levezetésénél azonban föltettük, hogy m egész szám és így minden további indokolás nélkül ezt az egyenletet nem differencziálhatjuk m szerint, mert m értékének megváltoztatása nem történhetik tetszés szerint választott kis mennyiséggel. Az említett egyenletet csak akkor differencziálhatjuk m szerint, ha ki tudjuk mutatni, hogy fönnáll m bármely értéke mellett. Ennek bebizonyítására tegyük föl, hogy s_n-et már kifejeztük volna m függvényeként. Akkor előbbiek alapján írhatjuk, hogy

$$1^n+2^n+\cdots+(m-1)^n=c_{n0}m^{n+1}+c_{n1}m^n+\cdots+c_{nn}m, \tag{5}$$

hol c_{n0} zérustól külömböző. Az egyenlet baloldalának csak akkor van értelme, ha m egész szám; a jobb oldalnak m bármely véges értékére. Az egyenlőség tehát m-nek csakis egész számú értékére nézve állhat meg.

Helyettesítsük be (2)-be $s_1, \ldots, s_n$-nek m-ben kifejezett értékeit és rendezzük az így nyert egyenletet m hatványai szerint, akkor m-re nézve $n+1$-ed fokú egyenletet nyerünk, a melyről tudjuk, hogy m minden egész számú értékére ki van elégítve. Ez azonban csak úgy lehetséges, ha az egyenlet azonosan eltünik. Azonos egyenletet m bármely értéke kielégít s így a (2) alatt álló egyenlet differencziálható.

A hatványösszegek meghatározása.

Differencziáljuk a (2) alatt álló egyenletet egymásután $n+1$-szer, akkor az

$$\binom{n+1}{1}s_1'+\binom{n+1}{2}s_2'+\cdots+\binom{n+1}{n}s_n'=\frac{(n+1)!}{n!}m^n-1$$

$$\binom{n+1}{1}s_1''+\binom{n+1}{2}s_2''+\cdots+\binom{n+1}{n}s_n''=\frac{(n+1)!}{(n-1)!}m^{n-1}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\binom{n+1}{1}s_1^{(n+1)}+\binom{n+1}{2}s_2^{(n+1)}+\cdots+\binom{n+1}{n}s_n^{(n+1)}=(n+1)!$$

egyenletrendszert kapjuk.

Szorozzuk az első egyenletet $\frac{1}{1!}$, a másodikat $\frac{1}{2!}$, stb. az utolsó egyenletet $\frac{1}{(n+1)!}$-el, akkor összegük

$$\binom{n+1}{1} S_1+\binom{n+1}{2} S_2+\cdots+\binom{n+1}{n} S_n=$$

$$=\binom{n+1}{1} m+\binom{n+1}{2} m^2+\cdots+\binom{n+1}{n} m^n, \tag{6}$$

hol

$$S_r=s_r'+\frac{1}{2!}s_r''+\frac{1}{3!}s_r'''+\cdots+\frac{1}{(n+1)!}s_r^{(n+1)}.$$

A (6) egyenlet n minden egész számú értékére fönnáll. Ha n helyébe egymásután az $1, 2, 3, \ldots, n$ értékeket teszszük, akkor az így nyert

$$\binom{2}{1} S_1=\binom{2}{1} m$$

$$\binom{3}{1} S_1+\binom{3}{2} S_2=\binom{3}{1} m+\binom{3}{2} m^2$$

$$\binom{4}{1} S_1+\binom{4}{2} S_2+\binom{4}{3} S_3=\binom{4}{1} m+\binom{4}{2} m^2+\binom{4}{3} m^3$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

egyenletrendszerből következik, hogy

$$S_1=m,\ S_2=m^2, \ldots, S_n=m^n.$$

Ha S_n értékét tekintetbe veszszük, akkor s_n számára a követ kező differencziál-egyenletet nyertük

$$s_n'+\frac{1}{2!}s_n''+\cdots+\frac{1}{(n+1)!}s_n^{(n+1)}=m^n. \tag{7}$$

Ennek megoldásával megkapjuk s_n értékét m hatványsorában kifejezve. A megoldás végrehajtása czéljából differencziáljuk a (7) egyenletet egymásután n-szer, akkor, ha tekintetbe veszszük, hogy s_n m-nek $n+1$-ed fokú egész függvénye, tehát minden $n+1$-nél magasabbrendű differencziálhányadosa zérus, a következő egyenletrendszert kapjuk:

$$s_n' + \frac{1}{2!} s_n'' + \cdots + \frac{1}{(n+1)!} s_n^{(n+1)} = m^n$$

$$s_n'' + \frac{1}{2!} s_n''' + \cdots + \frac{1}{n!} s_n^{(n+1)} = \frac{n!}{(n-1)!} m^{n-1}$$

$$s_n''' + \cdots + \frac{1}{(n-1)!} s_n^{(n+1)} = \frac{n!}{(n-2)!} m^{n-2}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$s_n^{(n)} + \frac{1}{2!} s_n^{(n+1)} = \frac{n!}{1} m$$

$$s_n^{(n+1)} = n!$$

Ebből az $n+1$ egyenletből meghatározhatjuk $s_n', s_n'', \ldots, s_n^{(n+1)}$ értékeit. Legegyszerűbb, ha csupán s_n' értékét határozzuk meg, mert akkor egyetlen integráczió megadja s_n-et. Szorozzuk az első egyenletet 1-el, a másodikat A_0-al, a harmadikat A_1-el stb., az utolsót A_{n-1}-el, akkor a rendszer egyenleteinek összege

$$s_n' = m^n + A_0 \frac{n!}{(n-1)!} m^{n-1} + \cdots + n!\, A_{n-1}$$

ha tudniillik a bevezetett állandókat úgy választjuk, hogy

$$\begin{aligned} &A_0 + \frac{1}{2!} = 0 \\ &A_1 + \frac{1}{2!} A_0 + \frac{1}{3!} = 0 \\ &A_2 + \frac{1}{2!} A_1 + \frac{1}{3!} A_0 + \frac{1}{4!} = 0 \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &A_{n-1} + \frac{1}{2!} A_{n-2} + \cdots + \frac{1}{n!} A_0 + \frac{1}{(n+1)!} = 0 \end{aligned} \tag{8}$$

legyen.

Ezek az egyenletek az $A_0, \ldots, A_{n-1}$ együtthatókat egyértelműleg, mint n és m-től független számértékeket határozzák meg, mert bármely értéke is van n-nek, azért $A_0, A_1, A_2, A_3, \ldots,$ értékei változatlanul ugyanazok maradnak. Igy pl.

$$A_0 = -\tfrac{1}{2}$$

$$A_1 = \frac{1}{2!}\frac{1}{6} \quad A_3 = -\frac{1}{4!}\frac{1}{30} \quad A_5 = \frac{1}{6!}\frac{1}{42} \quad A_7 = -\frac{1}{8!}\frac{1}{30}$$

$$A_2 = 0 \quad A_4 = 0 \quad A_6 = 0 \quad A_8 = 0.$$

Ha egyszerűsités kedvéért még a következő jelöléseket vezetjük be:

$$m_0 = n!, \quad \frac{n!}{k!}\, m^k = m_k,$$

akkor

$$s'_n = m_n + A_0 m_{n-1} + A_1 m_{n-2} + \cdots + A_{n-2} m_1 + A_{n-1} m_0.$$

Ennek az egyenletnek az integrácziójával megkapjuk s_n értékét. Ugyanis

$$\int_0^m s'_n\, dm = s_n,$$

mert $m=0$ értékre s_n is zérus. Továbbá

$$\int_0^m m_k\, dm = \frac{n!}{k!}\int_0^m m^k\, dm = \frac{n!}{(k+1)!}\, m^{k+1},$$

tehát

$$s_n = \frac{m^{n+1}}{n+1} + A_0 m^n + A_1 \frac{n!}{(n-1)!} m^{n-1} + A_2 \frac{n!}{(n-2)!} m^{n-2} + \cdots +$$

$$+ A_{n-2} \frac{n!}{2!} m^2 + A_{n-1} \frac{n!}{1!} m,$$

vagy

$$s_n = \frac{1}{n+1} m^{n+1} + A_0 m^n + \frac{1}{2}\binom{n}{1} 2!\, A_1 m^{n-1} +$$

$$+ \frac{1}{3}\binom{n}{2} 3!\, A_2 m^{n-2} + \cdots + \frac{1}{n-1}\binom{n}{n-2}(n-1)!\, A_{n-2} m^2 +$$

$$+ \frac{1}{n}\binom{n}{n-1} n!\, A_{n-1} m.$$

Vezessük be az A_r együtthatók helyébe a

$$B_r = (r+1)!\, A_r \qquad (r=1, 2, 3, \ldots)$$

egyenlet által meghatározott B_r együtthatókat, akkor

$$s_n = \frac{1}{n+1} m^{n+1} - \frac{1}{2} m^n + \frac{1}{2}\binom{n}{1} B_1 m^{n-1} +$$
$$+ \frac{1}{3}\binom{n}{2} B_2 m^{n-2} + \dots + \frac{1}{n-1}\binom{n}{n-2} B_{n-2} m^2 + B_{n-1} m \qquad (9)$$

kifejezést nyerjük, melyben a B_r együtthatók a Bernoulli-féle számok.

A Bernoulli-féle számok tulajdonságai.

I. *A Bernoulli-féle számok n-től független számértékek.* A megelőző fejezetben kimutattuk, hogy az A_r együtthatók tiszta számértékek. Mivel az A_r és a B_r együtthatókat

$$B_r = (r+1)!\, A_r$$

egyenlet kapcsolja össze, következik, hogy s_n kifejtésében előforduló Bernoulli-féle számok szintén n-től független számértékek.

Előbb kimutattuk, hogy $m=1$ értékre $s_n=0$. Tegyünk tehát a (9) egyenletbe m helyébe 1-et, akkor egyszerű átalakítások után

$$\binom{n+1}{2} B_1 + \binom{n+1}{3} B_2 + \dots + \binom{n+1}{n} B_{n-1} = \frac{n-1}{2} \qquad (10)$$

egyenletre jutunk. Ez egy rekurziós képlet a Bernoulli-féle számok meghatározására. Ha ebben n helyébe $2r$-et írunk a Moivre-féle, ha pedig n helyébe $2r+1$-et írunk, a Jacobi-féle formulát kapjuk.

Ha a rekurziós képletek bármelyikéből meghatározzuk a Bernoulli-féle számokat az első tíz számára, a következő értékeket kapjuk:

$$B_1 = \frac{1}{6} \quad B_2 = 0$$
$$B_3 = -\frac{1}{30} \quad B_4 = 0$$
$$B_5 = \frac{1}{42} \quad B_6 = 0$$
$$B_7 = -\frac{1}{30} \quad B_8 = 0$$
$$B_9 = \frac{5}{66} \quad B_{10} = 0.$$

Ebből a sorozatból kitűnik, hogy a páros mutatóval biró számok eltűnnek, a páratlan mutatóval birók pedig váltakozó előjelűek. Pusztán a definicziós egyenletből kiindulva kimutathatjuk, hogy ez a két tulajdonság általánosságban is fönnáll.

II. *A páros mutatóval bíró Bernoulli-féle számok kivétel nélkül zérussal egyenlők.* Differencziáljuk a (2) és (3) alatt álló egyenleteket m szerint s tegyünk ezután m helyébe zérust, akkor, ha tekintetbe veszszük, hogy

$$\left(\frac{ds_1}{dm}\right)_{m=0} = -\frac{1}{2}, \quad \left(\frac{ds_r}{dm}\right)_{m=0} = B_{r-1} \quad r>1$$

a következő egyenleteket nyerjük:

$$\binom{n+1}{2}B_1 + \binom{n+1}{3}B_2 + \cdots + \binom{n+1}{n}B_{n-1} = \frac{n-1}{2}$$

$$-\binom{n+1}{2}B_1 + \binom{n+1}{3}B_2 + \cdots + (-1)^{n-1}\binom{n+1}{n}B_{n-1} = -\frac{n-1}{2}$$

Tegyünk n helyébe $2r$-et és adjuk össze a két egyenletet, akkor

$$\binom{2r+1}{3}B_2 + \binom{2r+1}{5}B_4 + \cdots + \binom{2r+1}{2r-1}B_{2r-2} = 0.$$

Ha r helyébe egymásután 2, 3, 4, . . . értékeket teszszük, azt kapjuk, hogy

$$B_2 = 0, \quad B_4 = 0 \; . \; . \; . \; B_{2r-2} = 0.$$

De mivel az egyenlet r bármely positiv egész számú értékére fönnáll, következik, hogy r bármely értékére

$$B_{2r} = 0.$$

III. *A páratlan mutatóval biró Bernoulli-féle számok váltakozó előjelűek.* Annak kimutatására, hogy a Bernoulli-féle számok váltakozó előjelűek, induljunk ki a következő egyenletből:

$$S_n = 1^n + 2^n + 3^n + \cdots + [m(m-1)]^n =$$

$$= \frac{m^{n+1}(m-1)^{n+1}}{n+1} + \frac{1}{2}m^n(m-1)^n + \cdots +$$

$$+ \frac{1}{n-1}\binom{n}{n-1}B_{n-2}m^2(m-1)^2 + B_{n-1}m(m-1).$$

Ha S_n-et

$$S_n=1^n+2^n+\cdots+(m-1)^n+$$
$$+[1+(m-1)]^n+[2+(m-1)]^n+\ldots+[m-1+(m-1)]^n+$$
$$+\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ +$$
$$+[1+(m-1)(m-1)]^n+\cdots+[m-1+(m-1)(m-1)]^n$$

alakban írjuk és tekintetbe veszszük, hogy a hatványozás elvégzése után

$$[1+k(m-1)]^n+[2+k(m-1)]^n+\cdots+[m-1+k(m-1)]^n=$$
$$=s_n+\binom{n}{1}k(m-1)s_{n-1}+\binom{n}{2}k^2(m-1)^2s_{n-2}+\cdots+$$
$$+\binom{n}{n-1}k^{n-1}(m-1)^{n-1}s_1+(m-1)k^n(m-1)^n,$$

akkor

$$S_n=ms_n+\binom{n}{1}(m-1)s_1s_{n-1}+\binom{n}{2}(m-1)^2s_2s_{n-2}+\cdots+$$
$$+\binom{n}{n-1}(m-1)^{n-1}s_{n-1}s_1+(m-1)^{n+1}s_n$$

egyenletre jutunk. Differencziáljuk az egyenletet kétszer egymásután és tegyünk m helyébe zérust, akkor

$$S_n''=2[1+(-1)^n(n+1)]s_n'+(-1)^{n+1}s_n''+2\sum_{k=1}^{n-1}(-1)^k\binom{n}{k}s_k's_{n-k}'.$$

De $m=0$ értékre

$$(S_n'')_{m=0}=nB_n+2B_{n-1};\ s_k'=B_{k-1};\ s_1'=-\tfrac{1}{2}$$
$$s_n''=nB_{n-2},$$

tehát

$$(n-\tfrac{1}{2})[1+(-1)^n]B_{n-2}-2(-1)^n(n+1)B_{n-1}=$$
$$=2\sum_{k=2}^{n-1}(-1)^k\binom{n}{k}B_{k-1}B_{n-k-1}.$$

Tegyünk n helyébe $2r+2$-őt s vegyük figyelembe, hogy a $B_{2i}=0$, akkor

$$-(2r+3)B_{2r+1}=\binom{2r+2}{2}B_1B_{2r-1}+\binom{2r+2}{4}B_3B_{2r-3}+\cdots+$$
$$+\binom{2r+2}{2k+2}B_{2k+1}B_{2(r-k)-1}+\cdots+\binom{2r+2}{2r}B_{2r-1}B_1. \qquad (11)$$

Ennek az egyenletnek* segítségével általánosan is kimutathatjuk, hogy a BERNOULLI-féle szamok váltakozó előjelűek. Tegyük föl, hogy a (10) egyenlettel képviselt rendszer föloldásával B_{2r-1}-ig kimutattuk az előjelek váltakozását. Akkor egyszersmind látjuk, hogy

$$B=\mathrm{B}_1,\ B_3=-\mathrm{B}_3,\ldots,\ B_{2k-1}=(-1)^{k-1}\mathrm{B}_{2r-1},$$

hol

$$\mathrm{B}_1,\ \mathrm{B}_3\ldots\mathrm{B}_{2r-1}$$

mennyiségek az r első BERNOULLI-féle szám abszolut értékei. Ki fogjuk mutatni, hogy B_{2r+1} előjele $(-1)^r$. Vezessük be a (11) egyenlet jobb oldalán a BERNOULLI-féle számok abszolut értékeit, akkor a $k+1$-ik tag

$$\binom{2r+2}{2k+2}B_{2k+1}B_{2(r-k)-1}=\binom{2r+2}{2k+2}(-1)^k\mathrm{B}_{2k+1}(-1)^{r-k-1}\mathrm{B}_{2(r-k)-1}$$

előjele $(-1)^{r-1}$, mint látjuk független k-tól. Tehát a (11)-ik egyenlet jobb oldalán minden tagnak előjele egy és ugyanaz és pedig $(-1)^{r-1}$.

Ennélfogva

$$-(2r+3)B_{2r+1}=$$
$$=(-)^{r-1}\left[\binom{2r+2}{2}\mathrm{B}_1\mathrm{B}_{2r-1}+\binom{2r+2}{4}\mathrm{B}_3\mathrm{B}_{2r-3}+\cdots\right],$$

melyben a zárójel közé foglalt rész positiv. Ha az egyenlet mindkét oldalát -1-gyel szorozzuk, azonnal látjuk, hogy B_{2r+1}-nek előjele $(-1)^r$, tehát

$$B_{2r+1}=(-1)^r\mathrm{B}_{2r+1}.$$

Ugyancsak a (11)-ik egyenlet segítségével kimutathatjuk azt is, hogy a harmadik BERNOULLI-féle számtól, B_5-től kezdve e számok abszolut értékei folyton növekedő sorozatot alkotnak. Ha az említett egyenletbe behelyettesítjük az absolut értékeket és az első és utolsó tag összevonása után a többi tagot elhagyjuk, akkor következik, hogy

$$\mathrm{B}_{2r+1}>\frac{2}{2r+3}\binom{2r+2}{2}\mathrm{B}_1.\mathrm{B}_{2r-1}\quad(r\geqq3)$$

---

* A 11. alatt álló formulát EULER az $\frac{1}{2}\mathrm{cotg}.x$ sorba fejtéséből kapta.

vagy B_1 értékének tekintetbe vételével

$$B_{2r+1} > \left(1 + \frac{2r(r-3)+3r-8}{6r+9}\right) B_{2r-1}.$$

Ha tehát $r \geqq 3$, akkor a zárójelben levő tört pozitiv és így

$$B_{2r+1} > B_{2r-1}; \quad r \geqq 3.$$

Az előbb fölírt egyenlőtlenségből egyszersmind azt is kimutathatjuk, hogy a BERNOULLI-féle számok bizonyos megállapítható határon túl gyorsabban növekednek, mint bármely geometriai haladványnak tagjai.

Ugyanis

$$B_{2r+1} > \frac{2r+2}{2r+3} \cdot \frac{2r+1}{6} \cdot B_{2r-1}.$$

Ha r igen nagy, akkor az egyenlőtlenség jobb oldalán álló első tényezőt egyenlőnek vehetjük az egységgel és így

$$B_{2r+1} > \frac{2r+1}{6} B_{2r-1}.$$

Továbbá

$$B_{2r+3} > \frac{2r+3}{6} B_{2r+1},$$

tehát

$$B_{2r+3} > \frac{(2r+1)(2r+3)}{36} \cdot B_{2r-1}$$

és mivel

$$\frac{(2r+1)(2r+3)}{36} > \left(\frac{2r+1}{6}\right)^2$$

következik, hogy

$$B_{2r+3} > \left(\frac{2r+1}{6}\right)^2 B_{2r-1}.$$

Ha tehát q bármely erősen növekvő geometriai haladvány hányadosa, r értékét csak úgy kell választanunk, hogy

$$\frac{2r+1}{6} > q,$$

akkor r ezen értékéből számítva a BERNOULLI-féle számok erősebben növekednek, mint ez a geometriai haladvány.

Grúber Nándor.

A MEDÁRDUS NAPI IDŐVÁLTOZÁSRÓL.

RÓNA ZSIGMOND: «A hőmérséklet évi menete Magyarországon» cz. nagybecsü dolgozatának végeredményeit a czikkhez csatolt első tábla foglalja össze, a melyen grafikonok mutatják be a hőmérséklet járását, pentádonként, Magyarország hét igen különböző természeti körülmények között fekvő helyéről. A görbék apróbb hullámai közt egy rendkívül érdekes tünemény tűnik fel. Junius második pentádjában valamennyi görbe kis maximumot mutat, aztán hirtelen aláhanyatlik két pentádon át. Utána ismét megkezdi normális emelkedését a nyári tetőpont felé, majd ismét sülyed augusztus és szeptember hónapokban, a rendes módon. Csak szeptember végén mutat a görbe megint egy rendkívül szabályos hirtelen való felemelkedést, a hónap utolsó pentádjában. A junius elején és a szeptember végén észlelhető változások olyan pontosan egyidejüleg, olyan határozottan mutatkoznak mind a hét görbén, hogy méltán feltünést kelthetnek s tényleges jelenlétüket oly lelkiismeretes és kifogástalan módszerü tanulmány bizonyítja, a mely kételkedést nem enged meg.

A junius elején látható hőmérséklet-csökkenés és a szeptember végi emelkedés olybá tünteti fel a dolgot, mintha Magyarországon a nyár mindenütt körülbelül egy fokkal hüvösebb volna, mint különben. Tudjuk már korábbi vizsgálatok alapján (HANN, SCHENZL stb.), hogy Magyarországon a junius a legesősebb hónap s általában a legtöbb csapadék nyáron hullik. Ezzel meg van ugyan magyarázva az, hogy nyarunk hüvösebb, mint kellene lennie, de nem nyer értelmezést az a sajátságos tünemény, hogy épen junius elején és szeptember végén oly hirtelenséggel és olyan bámulatos szabályossággal következik be ez a hőmérsékletváltozás.

Miután Magyarországon a legtöbb eső (a helyi zivatarok kivételével) nyugatról jön, nagyon valószinü, hogy, miután nyáron nagyobb általában a csapadék, mint tavaszszal, tehát nyáron több a nyugatias irányu szél is, mint télen. HEGYFOKY * összeállította 194 hazai állomásnak szélirányait évszakonként (t. i. 216 állomás közül 22-t csak évi közepes értékeivel), gyakoriságuk szerint. Ebből a 194 sorozatból a tavasz és nyár adatainak számtani közepét vettem s így kaptam, hogy a nyugatias szélirányok hazánkban tavaszszal és nyáron a következő gyakoriságot mutatják:

Szél iránya	*SW*	*W*	*NW*
Gyakoriság tavaszszal	8·67	9·49	9·45
« nyáron	8·15	11·33	11·15

E szerint tehát *W* és *NW* szelek tetemesen gyakoriabbak nyáron, mint tavaszszal.

Az összes hazai állomások figyelembe vétele azonban némileg helytelen, mert a hegyi állomásokon bizonyos irányu lokális szelek annyira túlnyomók, hogy ez a tüneményt némileg fedezi. Így pl. a RÓNA féle hőmérsékleti görbéken is a most tanulmányozott tüneményt legszabályosabban a zavartalan alföldi állomások mutatják, míg pl. a medenczében fekvő Nagy-Szeben görbéje a legszabálytalanabb valamennyi között.

Ez az oka annak, hogy kiszámítottam ugyancsak HEGYFOKY adatai alapján a nagy magyar medenczében fekvő 20 városnak ** tavaszi és nyári közepes szélgyakoriságait s a következő adatokat kaptam:

Szélirány	*N*	*NE*	*E*	*SE*	*S*	*SW*	*W*	*NW*
Gyakoriság tavaszszal	13·58	7·30	5·73	8·86	10·84	10·12	8·94	12·12
« nyáron	13·25	6·34	4·39	5·92	8·24	9·00	12·31	15·24

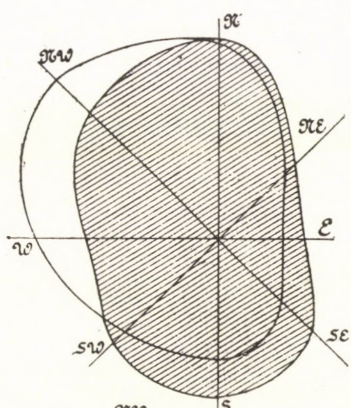
Ez a sorozat azt mutatja, hogy mind a két évszakban a horizonnak *N*—*W*—*S* feléből fujnak leggyakrabban a szelek, de míg ta-

* HEGYFOKY K.: A szél iránya a Magyar Szt. Korona országaiban. Budapest, 1894. T. T. T.

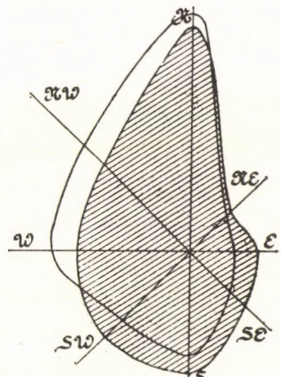
** Arad, Baja, Budapest, Csáktornya, Debreczen, Győr, Hódmező-Vásárhely, Kalocsa, Kaposvár, Kecskemét, Keszthely, Kisczell, Komárom, Kun-Szt.-Márton, M.-Óvár, Makó, N.-Becskerek, N.-Kanizsa, Ó-Gyalla, Pannonhalma.

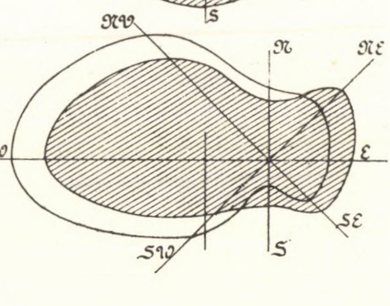
vaszszal a *S* és *E*, nyáron a *N* és *W* irányok a túlnyomóbbak. Ezt a sorozatot sokkal képiesebben az 1. ábra mutatja, a mely az egész szélrendszernek nyáron át *NW* irányban való erős kifejlődését mutatja. A nagyobb nyári csapadékkal tehát csakugyan vele jár a nyugati szelek nyári gyakorisága.

1. ábra.

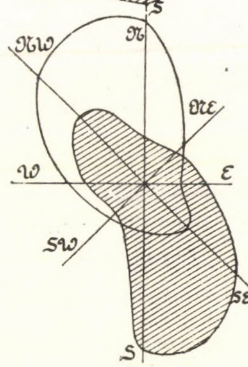


2. ábra.





3. ábra.



4. ábra.

Ez azonban a hirtelen való hőmérsékletváltozást még nem magyarázza meg. Közelebb is mehetünk azonban a dologhoz, ha pl. figyelembe veszszük Sáringer adatait, a ki hét dunántúli állomás szélgyakoriságát számította ki havi közepes értékeiben.* Ennek a hét

* Dr. Sáringer J. K.: A Balaton környékének éghajlati viszonyai. Bal. tud. tanulm. eredm. I. k. IV. rész 1. szakasz. Budapest 1898.

állomásnak májusi és juniusi szélgyakoriságából vett közepeit a következő kis táblázatban foglaltam össze:

Szélirány	N	NE	E	SE	S	SW	W	NW	C
Gyakoriság májusban ...	19·9	5·0	5·8	6·7	11·1	11·0	10·1	11·0	18·9
« juniusban ...	22·3	4·6	3·9	4·9	9·6	8·7	12·3	13·3	20·0

Ez a táblázat ismét az éjszaknyugati irányu szelek megerősödését tanusítja juniusban, de egyszersmind a keleties szelek megfogyatkozását. Az eltolódást legjobban a szélábrák szokott módja szerint készült 2. ábra tünteti fel. A dunántúli állomások uralkodó éjszaki szele szintén erősen érvényre jut az ábrában. Az eltolódás két egymásután következő hónapban már oly feltünő, hogy kénytelenek vagyunk valamely általános nagy okra gondolni, hogy a szélirányok ilyen pregnans, s a mint a hőmérsékletek ábrái mutatják, hirtelen való megváltozása indokolást nyerjen.

Még jobban is megközelíthetjük azonban a hirtelen hőmérsékletváltozás időpontját.

Budapest napi meteorologiai feljegyzései közkézen forognak s ezekből kiragadva az 1879—1901. évi feljegyzéseket, ebből a 23 évből kiszámítottam május két utolsó és junius két első pentádjának leggyakoribb szeleit. Miután azonban május két utolsó pentádja 11 napból, junius két első pentádja pedig csak 10 napból áll, a gyakorisági értékeket az előbbi időközben $^{11}/_{10}$, az utóbbiban pedig $^{10}/_{10}$ tényezővel szoroztam meg, hogy május két utolsó pentádja szelesebbnek ne tünjék fel, mint junius két első pentádja. A nyert értékek a következők:

Szélirány	N	NE	E	SE	S	SW	W	NW	C
Gyakoriság május két utolsó pentádjában	1·61	2·73	2·19	1·99	1·24	2·06	6·07	3·88	7·77
Gyakoriság junius két első pentádjában ...	1·96	1·96	1·57	1·48	0·70	2·96	6·96	4·74	7·61

A kis táblázat értékeit a 3. ábra mutatja be a szokott módon grafikusan. A nyugatra való eltolódás igen eleven ugyan, de számítások közben láttam már, hogy a nyugati szelek tulnyomó uralmának kezdete majd május végére, majd junius elejére esik és így a különbség éles volta nem tünhetik fel eléggé. Ez volt az oka, hogy megpróbáltam Ó-Gyalla állomásnak május utolsó előtti és junius második pentádja számára a közepes szélgyakoriságot kiszámítani. Azért választottam Ó-Gyallát, mert ennek napi feljegyzései közkézen forognak s azonkívül óhajtottam Budapesten kívül más állomást is figyelembe venni. Az eredmények a következők (1893—1901):

Szélirány	*N*	*NE*	*E*	*SE*	*S*	*SW*	*W*	*NW*	*C*
Gyakoriság máj. utolsó előtti pentádjában	0·78	1·00	1·11	2·33	3·00	0·78	1·11	1·67	3·22
Gyakoriság jun. második pentádjában	2·89	1·00	0·67	1·11	1·22	0·89	1.44	2·67	3·00

Valóban itt mutatkozik a legtetemesebb elmozdulás *NNW* és *SSE* irányban, a mint különösen a 4. ábra mutatja. Hogy az éjszaki irány is olyan erős változást szenved, az az észlelet-sorozat rövidségének s esetleg lokális körülményeknek tudható be, a melyekkel jelenleg foglalkoznunk nincs helyén.

Az eddigiekből azt látjuk tehát, hogy a nyáron tényleg jóval erősebb éjszaknyugatias szélirányok rögtönösen, két pentád határán belül keletkeznek, tehát a szél megfordulása, vagy az amúgy is uralkodó nyugatias irányu szélnek megerősödése rögtönös, rövid időn belül történik május végén és junius elején.

Csak egy tüneményre gondolhatunk, a mivel ezt a rögtönös megerősödést magyarázhatjuk, t. i. az Ázsia felett nyáron keletkező monzun szélrendszerre, a mely sokkal pregnansabb, sokkal élesebb alakban tünik fel az Indiai oczeánon, a hol a *SW* monzun kitörése olyan hirtelenséggel, rendesen 2—3 nap alatt tökéletesen megváltoztatja az indiai időjárás képét (bursting of the monsoon).

Elvileg alig lehet kétségbe vonni, hogy az Azsia felett meginduló nyári czirkuláczió valami módon ne éreztesse hatását Európa felett is, a melynek egy részére mindig kiterjeszti klimájának jellemét.

Hogy csakugyan az indiai oczeán délnyugati monzunjához nagyon hasonló, sőt talán identikus tüneménynyel van dolgunk, azt a következő kronologiai összeállítás bizonyitja legjobban. Bombay napi feljegyzéseiből kijegyeztem a monzun délre való fordulásának dátumát, a melyet a nagy szárazság után rögtönösen beálló tartós esőzés kezdő napja jellemez legjobban. Rendesen összeesik ez a nap a szél első déli irányú komponensének megjelenésével. A szél ugyanis Bombayban május végével lassanként fordul meg *NW* irányból *W*, majd *SW* felé s a mikor az első *S* komponenst látjuk feljegyezve, olyankor szokott megindulni a tartós eső is, néhány kivétellel. Oly szabályos és határozott ez a tünemény, hogy alig lehet hozzá hasonlót a meteorologia terén találni. Annál nehezebb megállapitani nálunk a nyugati szél megerősödésének kezdetét. Csak akkor határozott nálunk ez az időpont, a mikor a szél is teljesen éjszak-nyugatira fordul, meg a zivatar nélkül való esőzés is megindul. A táblázatnak három rovata van. Az első rovatban a budapesti időjárás esősre való változásának kezdete, a második Bombayban a *SW* monzun és esőzés megindulásának dátuma s a harmadikban a két dátum különbsége van napokban feljegyezve.

Év	A zivatar nélküli esőzés és a nyugati szél megerősödésének napja Budapesten	A SW monzun és az esős időszak kezdő napja Bombayban	Különbség (Bpest—Bombay)
1880	Máj. 29. (ujból jun. 18.)	Junius 3. (ujból junius 21.)	—5
1881	Junius 8. (bizonytalan)	Május 30.	+9
1882	Május 31.	Május 31.	±0
1883	(Máj. 26.) Május 31.	(szél: Május 21.), eső Máj. 27.	+4
1884	Junius 9. (bizonytalan)	Junius 11.	—2
1885	Május igen esős, aztán szélcsendes idő jun. 21-ig	Szél elmosódott, május 25-től; eső jun. 6.	—
1886	Junius 5. (éles)	(elmosódott kezdet) Jun. 16.	—11
1887	Igen rendetlen év, májusi csapadék 85 mm., a juniusi pedig csak 5 mm.!	Junius 1.	—
1888	Május 26.	Junius 4.	—9
1889	Május 24.	Junius 5.	—12
1890	Május 28. (szél)	Május 30.	—2
1891	Junius 11.	Junius 21.	—10
1892	Junius 4.	Junius 1.	+3
1893	Május 24.	Május 26.	—2
1894	[Máj. 25. (szél)] Jun. 4. (eső)	[Május 25.] Junius 6.	—2
1895	Junius 3.	Junius 10.	—7
1896	Május 21. (bizonytalan)	Junius 1.	—10
1897	Egész május esős	Szél máj. 26.; majd jun. 3. eső jun. 6.	—
1898	Május 24, junius 10.	Május 7!, Junius 9.	—
1899	Május 21.	Május 27, (Junius 9.)	—6

A táblázat ilyen módon való összeállitásához kétségtelenül szó fér, miután egyedül Budapestet kiválasztani kissé tetszőleges eljárás, azután meg a junius elején bekövetkező időjárás-megváltozás időpontjának meghatározása sokkal rugalmasabb probléma, hogysem teljes biztonságot tulajdoníthatnánk neki. Nem is szabad a táblázatnak több értéket tulajdonitani, minthogy csak épen mutatványul szolgáljon, milyen feltűnő időbeli megegyezés van a Magyarországon tapasztalható juniusi időmegváltozás és a bombayi monzun délre fordulása között.*

A legszélső rovatban feltüntetett különbségek algebrai összegéből vett számtani közép —3·9, tehát körülbelül négy nappal később következik be Bombayban az esőzés, mint Budapesten. Az eltérések természetesen meglehetős nagyok, de hisz hogyan várhatnánk nagyobb egyezést két ilyen távol fekvő, teljesen különböző klimáju helyen a monzun-jelenség egyidejü fellépésében?

Az eltérések közepes értéke körülbelül 4·9 nap, de ezt az eredményt nagyon rontja az 1881. évi egyetlen igen nagy eltérés, a mely valószinüleg a budapesti meghatározás bizonytalanságán alapul. Ezen az egyen kívül a legnagyobb eltérés 8 nap, míg maga a tünemény Bombayban is kerek egy hónap keretén belül mozog! Az időkülönbség, a melylyel a *SW* monzun Ceylonban és Bombayban jelenik meg, szintén mutat ennyi változatosságot.

Az időbeli egyezés tehát meglepő. Még jobban a tünemény közös okból eredő voltára utal az a körülmény, hogy a mikor az egyik helyen elveszti a tünemény éles jellegét, akkor a másikon is határozatlanná válik. Így különösen a 90-es évek végén az indiai monzun igen rendetlen (éhinség Indiában), nálunk is elvész a junius elejét jellemző, hirtelen való időváltozás.

Kétségtelen tehát, hogy a mi juniusi esőzésünk megindulása a nyugati szelek megerősödésével jár együtt, ez pedig meglehetősen rohamosan bekövetkező tünemény, a melynek időbeli megegyezése a délázsiai monzun kitörésével, arra vall, hogy ezt a rögtönös megerősödést szintén az ázsiai nyári czirkuláczió megindulása okozza.

---

* Sokkal biztosabb eljárás volna az ország több helyéről a csapadék napi értékeit grafikusan feltüntetni s a hol az összegezett ábra hirtelen emelkedést mutat, azt az időpontot összehasonlitani az indiai monzun kitörésével.

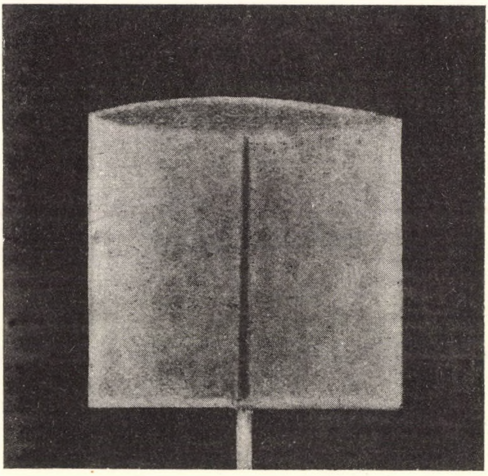
A nép száján élő, Medárdus napi jövendölgetésnek tehát van valami alapja: ha ekkor megkezdődik az esőzés, akkor rendes időben szabályosan jelent meg az «európai monzun» s az esőzés tartós lesz. A nyugati szél megerősödése és az esőzés kezdete csakugyan leggyakrabban junius elejére esik s ez megmagyarázza Róna Zsigmond hőmérsékleti ábráin oly szabályosan feltünő junius eleji hirtelen való lehülést.

Megjegyzem még, hogy a szeptember végi hirtelen való felmelegedéssel (a szeptember végi szép szélcsendes időjárással, az ú. n. «vénasszonyok nyarával») időbelileg összeesik az indiai *SW* monzun lassu megszünése s a *NE* monzun csendes megjelenése. Eliot szerint (Nature, 1897.) Bombayban a *SW* monzun sok évi közép szerint jun. 5.-én kezdődik és október 15.-én végződik.

Cholnoky Jenő.

A TESTEK FORGÁSÁNÁL ÉSZLELHETŐ ÚJ OPTIKAI JELENSÉGRŐL.

Ismeretesek a sodronyból készült és fehérre mázolt testminták (koczka, tetraeder, henger, gömb stb.), melyek a mértani tanítás segédeszközéül szolgálnak. E minták forgatásánál bizonyos saját-

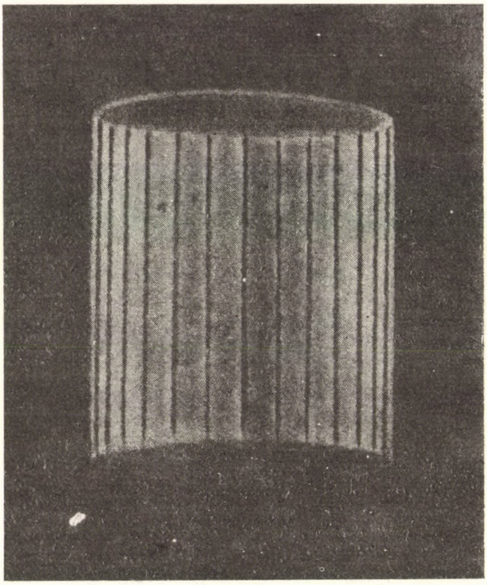


1. ábra.

ságos fekete vonalak tűnnek fel,* melyek elég érdekeseknek látszottak arra, hogy velük bővebben foglalkozzam és bár tervbe vett kisérleteimet még nem fejezhettem be teljesen, az eddig elért eredményekről mégis már ez alkalommal röviden beszámolok, mert úgy gondolom, hogy e jelenségek másokat is érdekelni fognak.

* E vonalakat egy mértani óra előtti próbálgatás alkalmával dr. Tolnai Vilmos, filologus kartársam vette először észre.

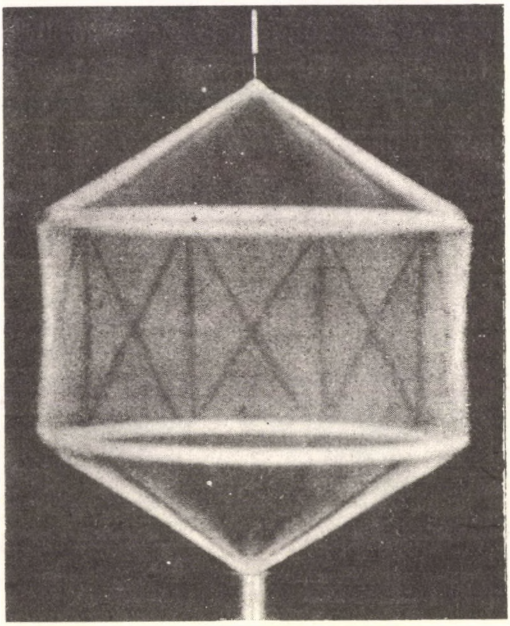
A tünemény, a legegyszerűbb alakjában úgy jön létre, ha két világosszínű pálczikát egymás körül gyorsan forgatunk. Czélszerű azokat egy harmadikra derékszög alatt ráerősíteni, ilyen alakban: ⊔, azután a középvonalnak megfelelő tengely körül gyorsan forgatni. Szükséges az is, hogy a háttér sötétes legyen. Bármilyen diffuziv fényben olyasféle tünemény áll elő, a milyent a mellékelt első ábra mutat. A gyors forgatás miatt a pálczikák egyes helyze-



2. ábra.

teit nem látjuk, hanem azoknak helyei összefolyva fehér hengerpalástként tűnnek fel. A képzeletbeli forgás-tengely helyén pedig éles fekete vonal látszik.

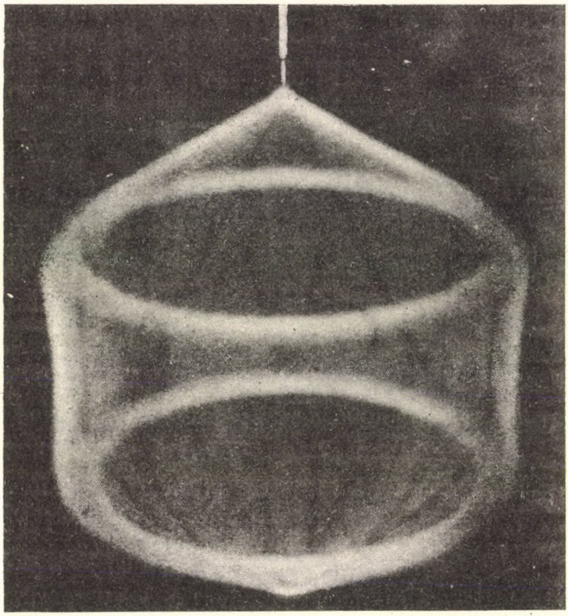
Hogyan keletkezik e vonal? Első pillanatra hajlandók volnánk optikai csalódásnak tartani, de rövid megfontolás meggyőz arról, hogy van objektiv oka. Oka ugyanaz, mint a miért a forgó üszköt tüzes körnek látjuk. A fénybenyomások hosszabb ideig tartanak, mint az azokat előidéző fény. A sötét háttérnek azt a részét, mely előtt a fehér pálczikák forognak, összefolytan fehéresnek látjuk. Azt mondhatnók, hogy ezek a pálczikák a háttérnek elfedett részét megvilágosítják. A mennyi fény róluk egy teljes körülforgás ideje alatt visszaverődik, oly mértékben látjuk azt a hátteret világosnak. Azonban e tér minden része nem kap egyenlő mennyiségű fényt: legnagyobb az eltérés a képzeletbeli forgástengelynek megfelelő



3. ábra.

helyen. Míg a tér többi részei egy teljes körülforgás ideje alatt négyszer kapnak fényt (mindegyik pálczikától kétszer): addig a forgástengely vetületének a helye ugyanezen idő alatt csak kétszer kap fényt (mindegyik pálczikától csak egyszer), mert hiszen e helyen az elől lévő pálczika a mögötte lévőt mindenkoron elfödi. Ez a rész tehát csak félannyi fényt kap, mint a tér többi része. A gyors forgás miatt az egyes helyekről jövő fénybenyomások egybeolvadnak s így a forgástengely vetületének sötéten kell feltűnnie a környezethez képest, mely épen kétszer jobban van megvilágítva. A szem az ilyen fényintenzitásbeli különbségek fölfogásában nagyon érzékeny.

E megfontolás alapján arra következtethetünk, hogy minden olyan esetben, melyben fehér pálczikákból álló testeket sötét háttér előtt forgatunk, fekete vonalaknak kell keletkezniök. E vonalak



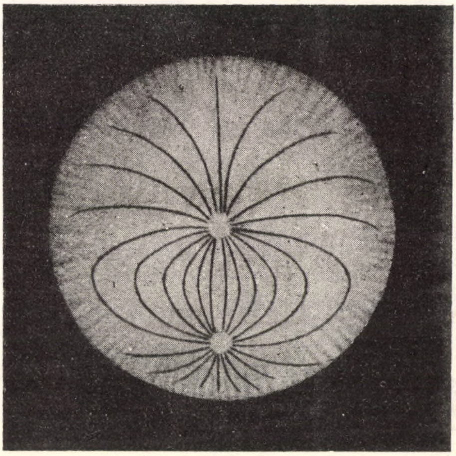
4. ábra.

azokon a helyeken keletkeznek, melyeken forgás közben vonalfedések jönnek létre. *A fekete vonalak rendszere a forgás alkalmával létrejövő összes vonalfedések képét állítja elő.*

Az ábrázoló geometria a forgás közben létrejövő vonalfedések megszerkesztésére külön módszerekkel bir. Mindenesetre érdekes az, hogy ezek a vonalfedések tisztán fizikai úton (fotografálás segítségével) is előállíthatók.

A 2. ábra egy forgó hengerminta képét mutatja. A hengerminta 16 alkotóját ugyanannyi fehér pálczika képviselte, ennek megfelelően 13 fekete vonal mutatkozott, melyek az összes vonalfedéseket állítják elő.

A vonalfedések helye és alakja nemcsak a test alkotórészeitől, hanem szemünk helyzetétől is függ. Ha más helyről tekintünk a forgó testre, akkor a létrejövő vonalfedések is szükségkép másfajták lesznek, így tehát a fekete vonalaknak is más rendszere tűnik fel. Persze e különbséget a hengernél nem vehetjük észre, mert akárhonnan nézzük is ezt, másféle vonalfedés nem jöhet létre,



5. ábra.

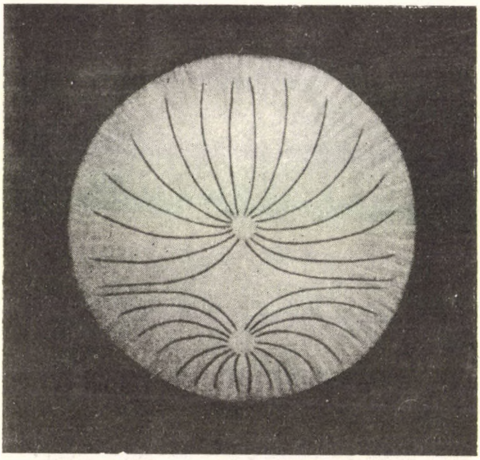
csak az, melynél egyik alkotó fedi a másikat. A 3. és a 4. ábra oly ikosaeder fotografikus képét mutatja, mely két szembefekvő csúcsa körül forog;* az első esetben a lemez oldalvást a testtel egyenlő magasságban a második esetben pedig szintén oldalvást, de a testnél magasabb helyzetben volt felállítva.

Ugyanezek a vonalak, melyek sötét háttér előtt feketéknek látszanak, világosakká válnak, ha a háttér világos. Különösen szembetűnő a jelenség, ha a kisérletet átmenő diffuziv fényben végezzük. A kisérletet úgy lehet berendezni, hogy áttetsző papiros-ernyő

* A fotografiákat Müller László tanár volt szives elkészíteni.

vagy tejüveg-ernyő mögé lámpát helyezünk és a testet ez előtt forgatjuk.

A tünemény nagyon élessé és ragyogóvá válik, ha nem diffusiv fényt, hanem sugárnyalábot használunk. Igy a vetítő lámpa sugárkévéjében a fekete vonalak sokkal élesebbek és feltünőbbek, mint a diffusiv fényben. Ilyen fényben azonban ujabb fekete vonalak is fellépnek. Ezek a vonalak direkt árnyékvonalak. A forgó test hátul



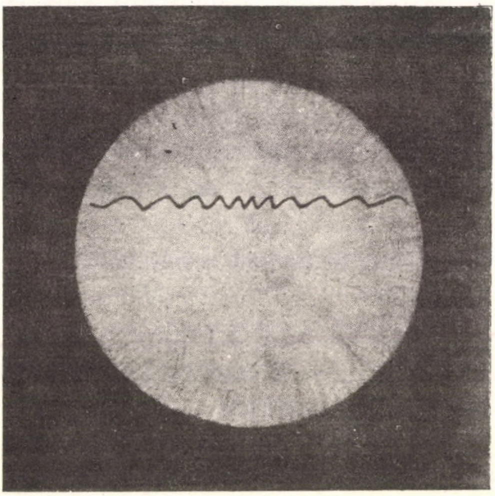
6. ábra.

fekvő része fehér ernyőnek tekinthető, melyre az elől lévő vonalak rávetik a maguk árnyékát.

E viszonyok tanulmányozására még nagy forgó ernyőket is készitettem. E czélra fehér fapálczikákat (körülbelől 50 cm. hosszúkat) sugárrendszerben helyeztem el és a középpont helyén összeerősitettem és tartóval láttam el. Az így szerkesztett ernyőt centrifugál géppel forgattam.

A forgó ernyővel nagyon változatos jelenségeket lehet létrehozni. Ha előtte fapálczikát mozgatunk, akkor az összes fedési helyeknek mértani helye fekete hullámvonalként tűnik fel. Ha az ernyőt sugárnyalábbal világitjuk meg és eléje fapálczikát tartunk, akkor azon megjelenik a pálczika árnyéka. Ha a pálczikát gyorsan föl és alá mozgatjuk, akkor nem kapunk elmosódott árnyékot, hanem nagyon éles fekete hullámvonalat. Ha a forgó ernyő előtt egy másik hasonló ernyőt forgatunk, akkor olyasféle vonalrendszereket kapunk, a minőket az 5. és 6. ábrák mutatnak. Az első esetben a két ernyő ugyanazon, a másodikban pedig ellenkező irányban forog.

A forgó ernyő egyenletes fehér fényű. Képeket is lehet rá vetíteni, ép úgy mint a közönséges vetítő ernyőre.



7. ábra.

A mozgó testek vetítése mindig nagy nehézséggel jár, pedig a fizikában gyakran van arra szükség. Különösen a hangtanban érezzük a hiányt, mikor a testek rezgéseit kellene előtüntetni. A forgó ernyő igen egyszerű és olcsó eszköz e czél elérésére. A 7. ábra egy rezgő húr képét mutatja a forgó ernyőn. Látjuk, hogy az hullámvonal. Hogyan keletkezett e kép? Ha közönséges vetítő ernyőre vetítettük volna, akkor a hullámvonal amplitudójával egyenlő szélességű halvány sávot kaptunk volna. A forgó ernyő pálczikákból áll, melyeken a húr pontszerű foltot hágy; a mint a húr tovább mozog, ép úgy tovább forog az ernyő is és a folt ugyanazon a pálczikán tovább csúszik le vagy fölfelé, míg a húr szélső helyzetét el nem éri. Ezek a vándorló foltok a fénybenyomások tartóssága folytán összefüggő hullámvonallá olvadnak össze.

A mint az ábrából látjuk, a hullámvonal az ernyő szélei felé széthúzódik; ez azért van, mert a középponttól távolabb eső pálczikarészek sebesebben mozognak.

A hullámvonal alakja nem függ a pálczikák számától, csak épen az ernyő forgási sebességétől. Minél nagyobb ez, annál jobban széthúzódik a hullámvonal. A forgási sebességből és a hullámhegyek számából a húr rezgési ideje is kiszámítható. A rezgési időt egyszerűen úgy kapjuk meg, ha azt az időt, melyben a forgó ernyő a hullámvonal egyik végétől a másikig elmozdúl elosztjuk a hullámhegyek számával.

A forgó ernyő tehát igen egyszerű módszert nyújt a húrok rezgésszámának meghatározására. De ugyanezzel a módszerrel hangvillák, rezgő lapok és membránok rezgéseit is meg lehet vizsgálni; e czélból azokra vékony drótot kell erősíteni.

További vizsgálatok vannak hivatva eldönteni, hogy e módszer mennyire képes pontos adatokat szolgáltatni.

Annyi azonban már most is bizonyos, hogy mint qualitativ módszer nagyon egyszerű és kényelmes.

Mikola Sándor.

LANGLEY BOLOMETERES VIZSGÁLATAI.

Körülbelül 20 éve annak, hogy Langley a bolometert a sugárzó hő vizsgálatánál először alkalmazta és e műszerben a fizikusokat oly eszköz birtokába juttatta, mely azóta számtalan esetben igazolta azon remények jogosultságát, a melyeket feltalálójuk a műszerhez fűzött. E remények megvalósulásának egy újabb bizonyitékát szolgáltatják azok az eredmények, a melyek egy újabban megjelent könyvben: a Smithsonian Institutiontól Washingtonban létesített astrophysikai obszervatorium annaleseinek I. kötetében foglalvák.* Az e munkában úgy a kisérleti berendezésekre, mint fizikai ismereteinek bővítésére vonatkozó eredmények Langleynek 1881-ben megkezdett bolometeres vizsgálataiból nőttek ki; az akkor először inaugurált kisérleti berendezéseknek 1898-ig elért tökéletesítésével nyert eredmények foglaltatnak e kötetben, úgy, hogy bízvást elmondhatjuk, hogy e munka húsz évi bolometeres vizsgálatnak eredménye.

A bolometeres méréseknek alapelve igen egyszerű, de az alapgondolattól olynemű praktikus kivitelig, hogy az eredmények a pontosság és megbízhatóság igen magas és szigorúan ellenőrizhető fokát érjék el, hosszú és fáradságos út vezet. Langley ezen munkájából e fáradságos út nevezetesebb fázisairól áttekintést nyerhetünk, bár a kötet fizikai mérési eredményeinek legnagyobb része csak két évnek az 1897 és 1898-nak észlelési anyagára támaszkodik t. i. azon időére, midőn a műszerek és a kisérleti berendezés a tökélynek magasabb fokát elérték.

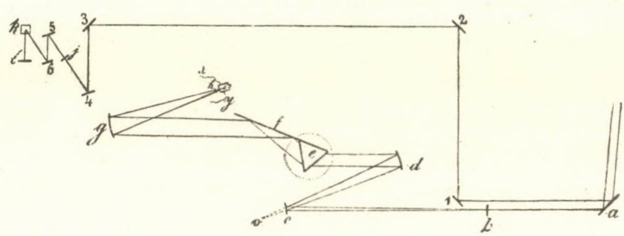
---

* Annals of the astrophysical observatory of the Smithsonian Institution. Volume I. By S. P. Langley Director. (Aided by C. G. Abbot. Washington 1900).

A kisérleti berendezés e végső formáját főbb vonásokban a következőkben írjuk le.

Az optikai rész a következő:

a a siderostat tükre, honnan a *b* vertikális réshez reflektáltatik a fénysugár (mint fényforrás a Nap szerepel), innen *c* cylindrikus konvex tükörhöz érkezik, honnan reflektáltatva *d* cylindrikus konkav tükörhöz jut; *c* és *d* távolsága úgy van megválasztva, hogy a *d*-től visszavert sugárnyaláb párhuzamos sugárnyalábot képezzen, a mely az *e* kősó prismára jut (némely esetben flint üveg prismát használt Langley ennek nagyobb dispersiója miatt), itt felbontatván a sugár a kősó alapjával párhuzamos *f* tükörtől, az eredeti iránynyal párhuzamos irányban reflektáltatik, ha a prismában minimalis deviacziót szenvedett és a *g* konkav tükörhöz jut, a mely oly távolságban van felállítva, hogy a bolometer főalkatrészén, az érzékeny platinszalagon *(i)* a rés egy reális képét hozza létre, miután a sugárnyaláb még a *h* kétszer konvex kősó cylindrikus lencsén hatolt át, a melynek csak az a rendeltetése, hogy a sugárnyaláb magasságát, mely a fennálló berendezés mellett a bolometer platina szalagján 5 cm. volna, a bolometer platinaszalagjának méretére redukálja, tehát a mint a platinaszalagok méreteiből kiderül, körülbelül egy ötödére 1 cm.-re kisebbítse. A méretek jellemzésére álljanak itt a következő adatok:



$bc = 790$ cm. $gi = 468$ cm. $(kl = 120$ cm.)
$co = 63$ » $od = 550$ » $hi = 25$ »

a rés *(b)* magassága 10 cm., szélessége változó rendesen 0·1—0·5 mm. között, néha azonban 1—2 mm. nagyságúnak is vétetett, az ultra vörös spektrum azon részeinek felvételénél, a melyekben a sugárzásenergia igen kicsiny (tehát pl. az X és Y vonalaknál.) A kősóprisma törőszöge a többször szükségessé vált csiszolás folytán 59° 53′ 30″ és 56′ 15″ között változott, törőlapjának szélessége 13 cm, a prisma magassága 19 cm. A kősóprisma helyett némely esetben, mikor nagyobb dispersióra volt szükség, flintüvegből készült prisma használtatott, a melynek törőszöge 59° 59′ 50″ volt, törőlapja 13·3 cm. széles, a prisma 16 cm. magas.

A siderostat tükréről még egy sugárnyaláb indúl ki, a mely az 1, 2, 3, 4 siktükrökön szenvedett visszaverődések után végre j résen keresztül két tükörről (5, 6) való reflektálás után a galvanometer k konkáv tükrére jut, a honnan visszaveretve az l fotografáló lemezen valódi képpé egyesül. — A bolometer $x\,y$ vezetékjei a galvanometerhez mennek.*

A használt galvanometerek érzékenységének jellemzésére álljon itt a következő adat, a mely egyik sokszor használt galvanometerre vonatkozik: Azon áram erőssége, mely szükséges arra, hogy 1 m. távolságban levő skálán 1 mm. kilengést mutasson a tű, 10 mp. lengéstartam mellett és 20 ohm galvanométer ellenálásnál $2 \cdot 10^{-11}$ ampère.

E nagy érzékenységnek igénybevétele azonban csak az utolsó években volt lehetséges, mert előbb egyéb hibaforrások, a melyek között mint legnevezetesebbek a hőmérsékleti változások, gyenge légáramok és az utczai forgalomtól okozott talajrezgések említendők meg, e roppant érzékenységtől nyerhető pontossági fokot illuzorikussá tették. E három zavaró befolyást sikerült azonban a hőmérsékletnek automatikus szabályozásával, a műszereknek légmentes szekrényekbe zárásával és a galvanometernek drótokra való felfüggesztése és higanyban usztatása útján teljesen ártalmatlanná tenni.

A prisma egy spektroszkop körén van elhelyezve, a mely különböző áttételek útján a galvanometer fotografáló lemezével teljesen

---

* A bolometer elve általánosan ismeretes és bővebb tárgyalását itt mellőzhetjük (Pekár Dezső 1898. április 21-én róla a Math. és Phys. Társulatban kimerítő előadást tartott.

synchronikus egyenletes mozgásba hozható; e mozgás sebessége változtatható, de a legtöbbnyire használt sebesség a következő volt: $^1/_2$ ívpercz elfordulása a körnek 1 időperczben történt és ugyanezen idő alatt a fotografáló lemez vertikális irányban 1 cm.-t haladt.

Az észlelés maga, azaz a bologrammok felvétele a következőkép történt.

Miután a tükrök elhelyezése, az áramerősség, a rés nagysága stb. kellőkép elrendeztetett, az észlelő a prismát tartó spektroszkop-körre erősíthető távcső segélyével úgy állítja be a spektroszkop-kört, tehát vele a prismát, hogy a spektrum látható részének valamelyik vonala, például az A vonal minimális deviaczióban legyen és ez essék a bolométer platinszalagjára. Mielőtt azonban még a bolométerre fényt bocsátana, először a fotografáló lemezt néhány perczig hagyja futni, hogy a galvanométer tűjének pusztán a talajrezgéstől vagy az áramerősség minimális ingadozásaitól származó kilengéseinek nagyságáról fogalmat nyerjen. És csak miután ez megtörtént, a mi a nyerendő bologrammok feldolgozásánál és az abszorpczió vonalak reálitásának megitélésénél jelentős szerepet játszik, a lemezt eredeti helyére tolja vissza és miután elegendő idő mult el arra, hogy az észlelő jelenléte folytán fellépő hőmérsékletkülönbségek kiegyenlítődjenek, a résből jövő fényt a bolometerre irányitja, elindítja az óragépet, a mely a spektroszkop horizontális körét és a fotografáló lemezt synchronikusan mozgatja. Ekként a spektrum más-más részei kerülnek minimális deviáczióba és a bolométer szalagjára; a szalagban a változó sugárzó energia folytán fellépő ellenállás-változások létesítette áramerősség-változásokat a galvanométer tűje a fotografáló lemezen regisztrálja. Az így nyert görbének komparátoron való kimérése útján az absorpczió vonalaknak az A vonaltól való távolságát direkt cm-ekben kapják, de mivel az érzékeny lemezen kimért hosszaknak a spektroszkop-kör szögelfordulásaihoz való viszonyát ismerjük, e távolokat szögmértékben is nyerjük, vagyis nyerjük az egyes abszorpczió vonalak és az A vonal minimális deviáczióinak különbségét. Ha most külön meghatározzuk az A minimális deviáczió szögét, akkor a többi abszorpczió vonalakéit is ismerjük és ezekből, meg a prisma törőszögéből a törés-mutatókat az egyes abszorpczió vonalakra. Ha most az abszorpczió vonalaknak megfelelő hullámhosszakat akarjuk levezetni, a prisma bologrammját egy rács szolgáltatta spektrummal kell összehasonlítanunk, a hol tudvalevőleg a hullámhossz arányos az eltérítési szöggel. LANGLEY e röviden vázolt mérési sorozatot elvégezvén, a mi mellesleg megjegyezve a különböző dispersió formulák kritikai tárgyalására vezeti, az 1897. és 1898. évi bologrammoknak rendkívül minucziózus és az összes hibaforrásokat nagyon behatóan és részletesen mérlegelő redukcziója után, a spektrum ultra vörös részének 5·3 μ-ig (hol μ=0·001 mm) terjedő részét rajzban foglalja össze, a mely a hőenergia eloszlását az ultravörös spektrumban illusztrálja. Mellesleg megjegyzem, hogy ez nem a szélső határ, a meddig az ultra vörös spektrum létezése kisérletileg igazolva van, hisz' RUBENS és TROWBRIDGE a kősó dispersióját 18 μ-ig is követhették.*

A mi LANGLEY ez irányú vizsgálatainak általános eredményeit illeti, a következőket említjük fel. Az ultravörös spektrumrészben a nagyobbodó hullámhosszak felé mindjobban és erősebben lépnek fel széles abszorpcziószalagok. E vonalak és szalagok nagy része a Föld légkörének hatása és egynémelyikéről tudjuk is, hogy mily eredetre vezethető vissza. Azt tudjuk, hogy a látható spektrumban az $a = 0·63$, $B = 0·69$, $A = 0·76\ \mu$ vonalak légköri eredetűek és részben a légkör vízpárája, részben oxygénje hozza létre őket. Az ultravörös spektrumban a

Ψ	absorpcziószalag	... ...	1·4 μ-nél
Ω	«	«	1·8 «
X	«	«	2·6 «

légkörünkben a vízgőz jelenlétének tulajdonítandók. Az Y 4·4 μ-nél mutatkozó abszorpcziószalag a szénsavat jellemzi.

Nevezetes jelenség, hogy a bologrammokban, a melyeket LANGLEY évek során át felvett, charakteristikus különbségek mutatkoznak az évszakok szerint. Erre vonatkozó pontosabb és végleges ered-

* Ann. d. Physik u. Chemie 1897. pag. 724.

ményeket szolgáltató vizsgálatok azonban az észlelési anyag elégtelensége miatt még eddig hiányzanak.

E néhány főbb jelenség már elegendő útmutatás arra, hogy megitélhessük azt az irányt, a melyben ily bolometeres mérések rendkívül fontosságúak, sőt ismereteink bizonyos irányú bővítésére nélkülözhetetlenek. Ha nagy részben a légkörünk hozza létre az ultravörösben mutatkozó abszorpczιószalagokat, úgy ügyesen csoportosított bolometeres mérések eredményei légkörünk hőabszorpczió-képességére okvetetlenül fontos felvilágosításokat adnak.

E csoportosítás történhetik vagy úgy, hogy a Nap alacsony és magas állásainál felvett bologrammok hasonlíttatnak össze, miáltal a napsugár által légkörünkben befutott kisebb és nagyobb út abszorpczió-képességeinek viszonya jut kifejezésre. Vagy történhetik e csoportosítás úgy, hogy két lényegesen különböző magasságú, de horizontális irányban egymástól nem nagyon távol fekvő állomáson *egyidejüleg* vétetnek fel bologrammok. Kétségtelen, hogy csak az utóbbi mód a szigorúan helyes és csak ez utóbbi uton várhatunk megbizható adatokat légkörünk abszorpczióviszonyaira és ezzel együtt a meteorologia egyik alapproblémájának megoldására. E probléma a soláris állandónak meghatározása, vagyis kaloriákban kifejezett azon hőmennyiségnek meghatározása, a melyet légkörünk felső határán 1 cm² terület 1 percz alatt a napsugarak merőleges beesése mellett nyer. E meteorologiai feladat előbbrevitelében épen Langleynek 21 év előtti (1881-ben), a Mount Whitney-n, a Sierra-Nevada hegylánczolat egy körülb. 3500 m magas hegycsucsán végzett bolometeres mérései nevezetes haladást jelentenek. Ezen expediczió munkálatai azon kívül, hogy a soláris állandóra megbízhatóbb értéket (3·07) adtak, a napsugaraknak a légkörben szenvedett abszorpcziótüneményére az akkori általános felfogással sok tekintetben merőben ellenkező és helyes törvényeket vontak le. E vizsgálatok tanították meg arra a két lényegesen különböző proczesszusra, a melyek folytán a napsugárzás Földünkre gyengítve érkezik. Az egyik az úgynevezett diffus reflexió, a melynél fogva a napsugarak a légrészecskék és a légkörben lévő igen apró víz- és porrészecskék által szétszóratnak és pedig a sugár különböző hullámhosszúságú részei különböző mértékben. E tüneménynek jellemzője az, hogy a különböző hullámhosszúságokra a transmissió-koefficiens a hullámhosszúsággal nő. A másik ok a sugárnak a légkörben szenvedett abszorpcziója, a mely szintén a hullámhosszúsággal nő.

Ezen expediczió főbb eredményeit a következő pontokban vonhatjuk össze:

1. Kisérletileg igazolták, hogy a Pouillet vagy helyesebben Bouguer-féle képlet $I = Ep^{\varepsilon}$, hol I a Naptól a földfelületre érkező sugárzó energia, E ugyanaz a légkör határán (tehát a soláris állandó), p a transmissio-koefficiense a légkörnek és ε a sugártól a légkörben befutott út, helyettesítendő a következővel:

$$I = E_1 p_1^{\varepsilon} + E_2 p_2^{\varepsilon} + \ldots$$

hol $E_1 E_2 \ldots p_1 p_2 \ldots$ a spektrum különböző hullámhosszúságú sugaraira vonatkoznak, vagy más szóval a Naptól jövő sugár a légkörben selektiv abszorpcziót szenved. A $p_1 p_2$ mennyiségek függnek a földfelület feletti magasságtól, más szóval, két egyenlő vastag réteg abszorpcziója különbözik a szerint, a mint a földfelülethez közelebb vagy távolabb van. Az első esetben általában nagyobb az abszorpczió.

2. Növekedő magassággal a földfelület felett tehát, ha a sugár kisebb utat fut be a légkörben, a látható spektrum intensitásmaximuma a rövidebb hullámhosszak felé tolódik el, más szóval a légkör a látható spektrum rövidebb hullámhosszú sugaraiból kevesebbet bocsát át, mit Langley egyszerű alakban így fejez ki: ha a Napot légkörünk nélkül vagy ennek felső határáról nézhetnők, akkor kéknek látnók.

3. Végre kimutatták, hogy csupán a közönséges aktinometrikus műszerekkel (Pouillet, Violle műszerei) a napsugárzás (solaris állandó) szigorúan épen nem, (mert ezek a selektiv abszorpczióra nincsenek tekintettel, csak az összenergiát mérik) bolometrikus mérések segítségül hivása mellett pedig csak akkor határozható meg, ha ismerjük a törvényt, a mely szerint a transmissió-koefficiens a magassággal változik.*

---

* I. M. Pernter. Met. Zeitschr. 1886. pag. 207.

E rövid vázlat eléggé tájékoztat arról a fontos feladatról, a mely a bolometeres mérésekre a meteorologiában vár. LANGLEY jelen munkájában a bolometeres méréseknek ez irányú fontossága nincs előtérbe helyezve. De hogy gondolt erre, azt bizonyítják régebbi kisérletei, a melyek épen e meteorologiai feladatok megoldására czélzó törekvéseiben a bolometer használatára vezették, és bizonyítja a jelen munka előszavának következő, rendkívül vérmes reményeket sejtető passzusa: «Bár távol vagyunk attól az időponttól, hogy ily módon (tudniillik bolometeres mérésekkel) az időjárás beálló változásait előre megjósoljuk, . . . mind a mellett aligha mondunk sokat, ha azt állítjuk, hogy ily irány felé kezdünk haladni és nekem úgy tetszik, hogy abbeli korábbi reményem, hogy a napenergia tanulmányozása nemcsak érdekes tudományos törekvés leend, hanem anyagi jólétünket is fogja előmozdítani, egy napon jogosult lesz.» Kivánjuk, hogy LANGLEYnek igaza legyen és ebbeli reménye teljesüljön.

Steiner Lajos.

KISÉRLETEK DOPPLER ELVÉHEZ.

Valamely hangnak magassága, továbbá valamely fényforrásnak szine a szerint módosul, a mint az illető hullámforrás és az észlelő közt levő távolság kisebbedik vagy nagyobbodik. Ez DOPPLERnek az elve, a mely felállítása (1842) után csak mintegy két és fél évtizeddel jutott kellő érvényre; akkor tudniillik, a mikor észrevették, hogy a csillagok színképi vonalai a megfelelő elemek vonalaihoz képest eltolódnak.

A DOPPLER-féle elv azonban nemcsak a színkép-vonalak eltolódását magyarázza meg, hanem módot nyujt arra is, hogy ki lehessen számitani bármely fényforrásnak közeledését vagy távolodását, még az esetben is, ha az a fényforrás oly messze van tőlünk, mint valamely állócsillag. S csakugyan most már a színképi vonalak eltolódásának fokából kielégitő pontossággal határozzák meg a csillagok sebességét, a kettős csillagoknak keringési és a bolygóknak forgási idejét.

Ha valamely csillag felénk közeledik, úgy attól másodperczenkint több fényhullám érkezik hozzánk, mint különben érkeznék akkor, ha a csillag mozdulatlan lenne. Természetes, hogy a csillag színképének sötét vonalai nem fognak összeesni annak az egyszerű anyagnak fényes vonalaival, a melynek elnyelő hatása folytán keletkeztek, hanem el fognak tolódni, még pedig jelen esetben az ibolyaszín felé. Könnyű belátni, hogy ez eltolódás akkor is jelentkezik, ha a csillag mozgásának csak egyik összetevője is beleesik a látásvonalba. Ezen sebességi összetevő folytán a színképi vonalak eltolódása oly nagy és oly irányú, mint a milyen nagy és a milyen irányú eltolódást a csillag és a naprendszer sebességének különbsége okoz. Ép így jő létre eltolódás a vörös szín felé, ha a csillag tőlünk távozik.

Igaz, hogy a színképeknek ilyetén megfigyelése rendkívül kényes, de az eredmények pontosságában a mai finom eszközök mellett bátran megbízhatunk annál is inkább, mert itt minden alkalommal a színképeknek fotografiáját használják fel. Jelenleg mintegy száz esetben határozták meg a naprendszerhez közeledő vagy távolodó csillagnak sebességét a látás-vonal irányában, sőt számos spektroskopi kettőscsillag esetén e sebességnek szabályosan periodikus változását is.

A DOPPLER-féle elvnek kimutatására hang-forrást szokás használni.

Kiválóan alkalmas hang-forrás e czélra a gőzmozdony sípja. Ha valamely gőzmozdony óránként például 50 *km* utat tesz meg, úgy sípjának sebessége 14 $msec^{-1}$, a mi a hang sebességének $^1/_{24}$-ed része. A síp hangjának e szerint fél hanggal emelkednie, illetőleg alászállnia kell, ha a gőzmozdony felénk közeledik, illetőleg tőlünk távozik: a mi tényleg meg is történik. Ily fajtájú kisérleteket tettek csakhamar a DOPPLER elve felállítása után BUYS-BALLOT (1845), SCOTT RUSSEL (1849) és főleg VOGEL (1876). Ide tartoznak azok a megfigyelések is, a melyek a gőzmozdony füttye és annak visszhangja közt előálló hangkülönbség kimutatására vonatkoznak.

Minthogy e kisérleteknél a hangmagasságok különbségeit kell megfigyelnünk: a hangzó test rezgési sebességének tulságos nagynak nem szabad lennie. E körülmény lényegesen hozzájárul ahhoz, hogy a kisérleteket laboratoriumokban is el lehessen végezni. Im itt következnek.

FIZEAU (1848) kisérletéhez oly eszközt használt, a mely a SAVART-féle korong megfordítottjának mondható. Ő ugyanis a forgó korongra kemény papirlapot erősített, a fogakat pedig — a forgó korong síkjában — egy körív belső részére helyezte el. Bizonyos forgási sebesség mellett, ha például a készülék előtt állva a *c* hangot halljuk, akkor a készülék mögött, ugyanoly távolságban, *e*-t fogunk hallani; és a két helyzet között mindazokat a hangokat, a melyek az említett két hangjegy között vannak. Előnyösebb lesz a kisérlet, ha egymástól 180 fokra, két helyen alkalmazunk egyenlő számú fogakkal egy-egy ívet. Most a forgás a két ívre nézve ellenkező értelmű, s a két különböző hangot egymásután vesszük észre, a nélkül, hogy helyzetünket változtatnók.

Ugyanez elven alapszanak Mach (1860—62) és Wood (1896) kisérletei. Lényegük a következő. Két-három méter hosszú botra kis sipot erősítünk, a melybe a bot hosszában megerősitetten huzódó — például — kaucsukcső segítségével fúvunk. Ha a botot ide-oda mozgatjuk, a hang esése és emelkedése tisztán kivehető.

Hangvillával kisérleteket legelőbb König (1865) tett. Egy hangvillánál a hang magasságának változását figyelte meg. Ő maga a szoba falával szemben foglalt helyet s a hangvillát a fal felé, arra merőleges irányban tolta el. E kisérlethez erős, igen magas hangvillát — zönge-szekrény nélkül — czélszerű használni, továbbá lassan kell vele a falhoz közeledni vagy attól távolodni.

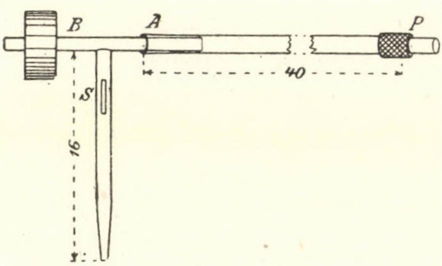
Két hangvillánál a lebegéseket kell megfigyelnünk, a melyeknek száma a hangvillák kölcsönös helyzetváltozásánál növekszik vagy csökken. König két (másodperczenkint 522 rezgéssel) c_2-ős hangvillát állított egymás mellé s az egyiket 4 rezgésszámmal magasabbra hangolta. Ha hangoztatás közben mind a két hangvilla nyugton állt, úgy 4 lebegést vett észre; ha pedig a mélyebb hangvilla feléje 0·6 $msec^{-1}$ sebességgel közeledett, a lebegések száma egygyel kevesebb lett. Ugyanis a c_2-nek hullámhossza körülbelül 0·6 m, így az utóbbi esetben a fül másodperczenkint egy rezgéssel többet vesz észre, a lebegések számának tehát *egy*-gyel kevesebbnek kell lennie. Ha a magasabb hangvillával közeledünk az észlelő felé, akkor ellenkezőleg egy lebegéssel többet fogunk hallani.

Méréseket e módszer szerint Schlüngel (1873) és Quesneville (1879) tettek. Két összehangolt hangvillával Mayer Alfréd is kisérletezett, még pedig úgy, hogy az egyiket mozgatta, s a Doppler-féle elv helyességét a kimaradó együttzöngések alapján bizonyította.

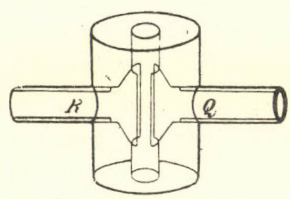
Kiválóan pontos eredményeket adtak Mach kisérletei, főleg azok, a melyeket (1878) a szabadban végzett. Mach zöngeszekrényes hangvillát (440 kettős rezgéssel másodperczenkint), továbbá kis sipot félkörben ide-oda mozgatott, s megfigyelte az így keletkezett hangváltozásokat. Ha e kisérletet szobában végezzük, vigyáznunk kell a fal által keltett visszaverődésre. A szabadban végzett kisérletnél a félkörben való mozgatást vízszintes irányban kell eszközölnünk.

A Mach-féle kisérletet a körben forgó síppal Gulik (1901) olykép módositotta, hogy azt bármely középiskolai laboratóriumban nagyobb hallgatóságnak is be lehet mutatni.

Egy 12 *cm* hosszú *AB* sárgaréz csőnek közepére egy 16 *cm* hosszú és 0·9 *cm* széles sárgaréz csövet merőlegesen forrasztunk (1. ábra), a melyet azután a centrifugális gépre erősítünk. Az első csőnek egyik (*A*) felére 40 *cm* hosszú és 1·1 *cm* széles vékonyfalú üvegcsövet ragasztunk, a végén az a_1 alaphangú (*P*) síppal. Az *AB*



1. ábra.



2. ábra.

csőnek másik (*B*) fele zárt és a középpontfutó erő ellensulyozására ólomsulya van. A merőleges csőben körülbelül 3 *cm*-nyire *AB* alatt a 2 *cm* hosszú és 0·15 *cm* széles *S* nyilást reszeljük ki.

Fúrjunk át egy nagy parafa-dugót először hosszában a merőleges cső beilleszthetésére, azután a hosszra merőlegesen, keresztben úgy, hogy a (*QR*) keresztfurat a hosszfurattal két 1·8 *cm* magas nyilás vagy hasadék útján közlekedjék. (2. ábra.) *Q* és *R*-nél a parafába rövid üvegcsöveket ragasztunk, a melyekre a fuvóasztal két gummicsövét felhúzzuk. Az így elkészített parafába a 16 *cm*-es csövet beszúrjuk úgy, hogy *S* nyilása a keresztfurattal egy irányba essék; most a csövet függőlegesen a centrifugális gépre, a parafát pedig állványhoz erősítjük. Ez utóbbit azért, hogy a parafa a csővel körül ne foroghasson.

Ha *R* nyiláson keresztül fúvunk, úgy a síp minden körülforgásnál 100°-nyi közökben mindaddig hangzik, a míg a forgó *S* hasadék R furattal közlekedik. Ha a kisérletet így kezdjük, a parafát úgy kellett megerősitenünk, hogy a síp a hallgatóság felé közeledjék. Fújjunk most Q nyiláson át, a síp a hallgatóságtól való távolodása mellett ismét 100°-nyi forgásközben fog hangzani. Gyorsabb forgatásnál tehát oly hangot hallunk, a mely magasabb vagy mélyebb a szerint, a mint a levegőt az egyik vagy másik csövön át hajtjuk. Egyszerű számítás útján megkapjuk, hogy ily módon egy egészhangból álló hangkülönbséget akkor érhetünk el, ha a síp sebessége 20 $msec^{-1}$.

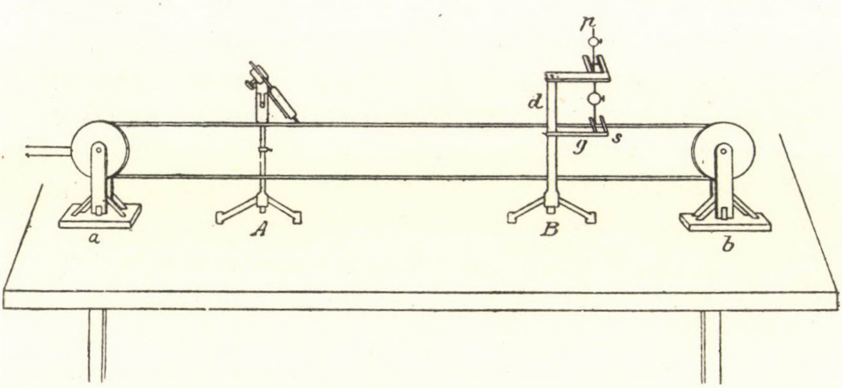
Ha mindkét (Q és R) csövön át egyszerre fúvunk, akkor egy emelkedő és egy alászálló hanglökést felváltva hallunk. Továbbá, ha a gépet kezdetben igen lassan forgatjuk, a hangmagasság ugyanaz; de rögtön észrevehetjük a hangkülönbséget, ha már a gépet kissé gyorsabban forgatjuk.

Készíthetünk parafát négy keresztfurattal is, a melyeket négy kaucsukcső köt össze a fuvó asztalnak négy — tolókákkal ellátott — nyilásával. A parafa belső vágásainak most szükebbeknek kell lenniök, úgy, hogy a sipok már 60°-nyi elfordulás mellett is hangzanak. A tolókák helyes alkalmazása mellett ismét halljuk az emelkedő vagy alászálló hangot, vagy magát a változatlan a_1-t is. Ha mind a négy tolókát egyszerre tartjuk nyitva, gyors egymásutánban halljuk a következő hangokat: *a, ais, a, as, a, ais* stb. E hangsor a megfigyelést nagyon megkönnyíti és a kisérletet megszépíti, főleg ha a gépet lassan forgatjuk.

A Gulik-féle kisérletnél czélszerű az adott méreteket megtartani; mert ha például a csöveket szükebbre veszszük, a hangerősség jelentékenyen alászáll és a síp más hangot ád, mint a minőt akkor kapunk, ha közvetlen szánkkal fúvunk be. A kisérlet előnyei: A forgási pályának relative csekély átmérője miatt a szoba falaitól eredő visszaverődés nem oly zavaró. Továbbá az emelkedő és alászálló hangok nem lassankint, hanem gyorsan mennek át egymásba.

A Doppler-féle elvet, mondhatni, szemlélteti Elsässernek (1901) kisérlete, a melyet középiskolai laboratoriumokban szintén elvégezhetünk, még pedig következőkép.

Vízszintes asztallapra két körülbelül 1·5 m távolságban levő egyenlő nagyságú *a* és *b* kereket szilárdan erősítünk (3. ábra). A kerekek ugyanegy síkban vannak és kerületükön 1 *cm*-nél valamivel szélesebb vályú van, a melyben körülbelül 1 *cm* széles, zárt, sima papirszalag feszül, a melynek a kerekek közt lévő része vízszintesen mozog. Hogy a mozgás alkalmával a papir-síknak minden ingadozását megakadályozhassuk, a felső szalag alá kellő helyen állvány segítségével gömbölyű vezető-rudacskát vízszintesen alkalmazunk. A kerekek egyikét kézzel vagy előnyösebben mótorral nem nagyon gyorsan, egyenletesen mozgatjuk.



3. ábra.

A két kerék közt nagy rezgési tágasságú (*A*) hangvillát alkalmazunk, s egyik szárára fekete tintába mártott kicsiny irótollat erősítünk. A hangvillát úgy állítjuk be, hogy az irótoll hegye a felső papirszalagot gyöngén érintse. Ha a kerék forgása mellett a hangvillát hangoztatjuk, úgy az az egyenletesen mozgó papirszalagra hullámgörbét ír le, a mely szintén tovahalad.

A hangvillától bizonyos távolságra *B*-nél rövid *p* ingát állítunk fel, még pedig úgy, hogy lengési síkja a papirszalaggal keresztben legyen. Ez a metronom-ingához hasonlít, s vékony fémpálczából áll, két fel s alá tolható gömbbel. Az ingarúd végén szines folyadékkal beitatott vékony és finom ecset van, a melynek hegye a papirt érinti. Az inga forgás-tengelyét magában foglaló *d* függőleges állványból megfelelően egy vízszintes *g* kar nyúlik ki, a mely —

közvetlen a papirszalag felett — mintegy 3 *cm* hosszú és 0·5 *cm* s nyilásban végződik. Az inga lengetése mellett a nyilás alatt elhuzódó papirszalagon egyenlő időközöknek megfelelő időjelzéseket kapunk, a melyek között a felrajzolt hullámokat megszámlálhatjuk. A hangvilla most a hullám-gerjesztő, a nyilás a hullám-felfogó testnek felel meg.

Ha már a hangvilla álló helyzetében a papirosra hullámgörbét rajzolt, toljuk el a papirszalag hosszában a hangvillát bizonyos, például 30 $cmsec^{-1}$ sebességgel. Erre szolgál az asztalon a szalaggal párhuzamosan alkalmazott lécz, a melynek mentén az *A* állvány eltolható. Ha a zengő hangvillát az inga felé toltuk, akkor a hullámok rövidebbek lesznek, ellenkező esetben pedig hosszabbak. Ez eljárás megfelel annak az esetnek, a mikor a hangforrás az észlelőhöz közeledik, illetőleg attól távozik.

Számláljuk most meg a két egymásután következő időjelzés között a papirra rajzolt — más szóval a bizonyos időegység alatt a hullám-felfogóhoz érkezett — hullámokat, úgy azt veszszük észre, hogy a hangvilla eltolásakor keltett hullámok száma nagyobb, illetőleg kisebb, mint a mikor a hangvilla nem mozgott.

Legyen n a tetszőleges időegységnek megfelelő hullámoknak száma, a mikor a hangvilla nem mozog, n_1 és n_2 pedig a mikor mozog, λ, λ_1, λ_2 a megfelelő hullámhosszak, akkor

$$\lambda_1 = \lambda\left(1 - \frac{v}{c}\right) \quad \text{és} \quad \lambda_2 = \lambda\left(1 + \frac{v}{c}\right),$$

tehát

$$n_1 = \frac{nc}{c-v} \quad \text{és} \quad n_2 = \frac{nc}{c+v}.$$

Itt c a papirszalagnak és v a mozgó hangvillának sebességét jelenti. A képlet helyességét bármely példával beigazolhatjuk. Abban a különös esetben, a mikor $v = c$; $\lambda_1 = 0$ és $\lambda_2 = 2\lambda$, míg $n_2 = \frac{n}{2}$, a mi tényleg be is következik.

Ugyancsak felállíthatunk helyes képletet arra az esetre is, ha a hullám-felfogó (a lengő-inga) mozog a hullámforrás (hangvilla) irányában.

Az itt említett kisérletek mindannyian a hangtani kutatások körébe vágtak. Legújabban BÉLOPOLSKY (1901) a fényhullámokat használta fel DOPPLER elvének beigazolására, a nélkül azonban, hogy az égi testeket segítségül vette volna. Kiindult DESLANDRES és POINCARÉ ama kisérleteiből, hogy valamely fényt visszaverő testnek mozgása a hullámhosszakon ép oly változásokat képes előidézni, mint a minőket maga a fényforrás mozgása előidéz. BÉLOPOLSKYnak sikerült többszörös tükrözés által a mozgó tükrökön mesterséges színképvonal-eltolódásokat előállítani.

A kisérlet berendezése lényegileg: két, egymással ellenkező irányban lehetőleg gyorsan mozgó tükör, a mely valamely fényforrás fényét kétszeres visszaverődés után nagy fényerősségű spektrográfba küldi. A tükrök sebességét a színképvonalak eltolódásából, s egyúttal a tükrök mozgásából is meghatározhatni.

Elméleti számítások alapján egy mozgó tükör által egy visszaverődés folytán előidézett homogén fény hullámhossza:

$$\lambda_1 = \lambda_0 \left(1 \pm \frac{2v}{V} \cos \psi\right),$$

a hol λ_0 az eredeti hullámhossz, v a tükörnek, V a fénynek sebessége, ψ a tükör mozgásának és felületének normálisa által alkotott szög. Több tükör alkalmazása mellett n-szeres visszaverődésnél — föltéve, hogy a tükrök sebessége egyenlő és ψ állandó — elégséges pontossággal:

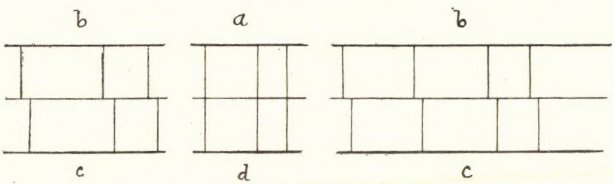
$$\lambda_n = \lambda_0 \left(1 \pm \frac{2nv}{V} \cos \psi\right).$$

Az előjel v-nek irányától függ. Ha n-nek értékszáma elég nagy, $\lambda_n - \lambda_0$ kellő pontossággal megmérhető, még ha v relative kicsiny is.

BÉLOPOLSKY a tükröket — a gőzhajó kerék-lapátjainak mintájára — két ellenkező irányban forgatható kerékre szerelte föl, a sugárnyalábot pedig heliosztat segítségével veti a tükrökre. A három összetett hasábú spektrográfot alkalmas ernyőszerkezettel látta el és kellő helyen állította fel.

Forogjanak a tükrök első ízben egy irányban. A gyorsan forgó tükrökben ide-oda tükröznek a fénysugarak, de közülök csak az a fénynyaláb surranhat be a spektrográf nyitott résének egyik felén, a mely abban a pillanatban verődik vissza, a mikor az egyik kerék valamelyik tükre a másik kerék valamelyik tükrével párhuzamos helyzetű. A rövid időközökben egymásra következő pillanatnyi fényhatások a fotografáló lemezen bizonyos idő multán előhívhatók. Az így nyert (*b*) színképnek szélessége a fél rés hosszával egyenlő (4. ábra).

Forogjanak másodízben a tükrös kerekek ellenkező irányban és fedjük be most a spektrográf nyitott résének előbbi felét, ellenben nyissuk ki másik felét. Ez esetben a tükrök a fénynyaláb felvillanásának pillanatában ép oly sebességgel távolodnak egymástól, mint a milyennel megelőzőleg egymáshoz közeledtek. Bizonyos idő



4. ábra.

elteltével a fotografáló lemezen az előbb fölvett színkép mellett új (*c*) színkép fog keletkezni, a mely a tükör mozgása folytán beálló vonaleltolódásokat ellenkező értelemben tünteti fel.

E fölvételeknél hőmérsékleti befolyások következtében színszórási változások léphetnének fel. Hogy ezek megismerhetők legyenek, Bélopolsky a fölvétel *alatt* a lemezt a színkép középső részében mozgó tükrök mellett úgy fedte be, hogy a két — eltolt vonalú — színkép egymástól elválasztva, a födött helytől jobbra és balra keletkezzék. E fölvétel *előtt* és *után* pedig az oldal színkép-részeket fedte be, s nyugalomban lévő tükör mellett a középső színkép-részt rövid ideig exponálta, még pedig kezdetben a felső rés-félnek, végül az alsó rés-félnek felhasználásával. Így keletkezik a középső hullámhosszak színkép-részében két egymás mellett fekvő (*a* és *d*) színkép, a melyek vonalai egymással szemben eltolódást nem mutathatnak, ha a készülék az egész kisérlet ideje alatt változatlanul maradt. Ez utóbbi tulajdonkép ellenőrző színkép, a melytől a jobbra és balra eső, egymás felett lévő színképek — a tükrök relativ mozgásából kifolyólag — kétszeres eltolódást tüntetnek fel.

A Bélopolsky által felhasznált színkép-rész a sötétkék, és $\lambda = 438$ $\mu\mu$-tól $\lambda = 450$ $\mu\mu$-ig terjed. Természetes, hogy az ismételt tükrözések miatt a fény erőssége jelentékenyen meggyöngül, s ha mérhető színképet akarunk kapni, a kinntartásra hosszú idő szükséges. Napfénynél nyolczszoros tükrözés és nyolcz mozgó tükör mellett a fotografozás idejére egy óránál több, így az egész kisérlethez két óránál több idő kellett. A fényveszteség nagyságát jellemzi, hogy álló tükrök mellett 2 mpercznyi kinntartás már erőteljes spektrogrammot adott. De az ily hosszú ideig tartó kisérletek nem alkalmasak részben a napos égnek, részben a hőmérsékleti állapotnak változása miatt. Ez okból a későbbi kisérleteknél csak hat tükör volt használatban, a mikor is egy kisérlet-sorozat alig tartott tovább egy óránál. A tükrös kerekeket — 7·25 *ampère* mellett — elektromótorok forgatták, s a körülforgások száma másodperczenkint 44 volt.

Bélopolsky azokat a mérési eredményeket tette közé, a melyeket 1900 nyarán Pulkovában végzett kisérleteiből kapott. És pedig a tükrök relativ sebessége, kiszámítva:

1900	vonal eltolódásból	körülforgásból
június 27	0·73 $kmsec^{-1}$	0·46—0·55 $kmsec^{-1}$
július 1	0·67 «	0·50—0·60 «
július 6	1·28 «	0·64—0·78 «
július 9	0·67 «	0·64—0·78 «
aug. 7	0·67 «	0·64—0·78 «
aug. 9	0·67 «	0·64—0 78 «

A mint látjuk a Doppler-féle elv alapján a színképi vonalak eltolódásából kiszámított és a közvetlen észleletből meghatározott sebességek megegyezése még nem teljesen kielégítő. De Bélopolsky-nak kisérletei ez irányban az elsők voltak, s a kisérletezőnek már azért is nagy az érdeme, mert kimutatta, hogy a kisérleti vizsgálódások ez új téren is kivihetők.

Irodalom. Á. Bélopolsky értekezése: The Astrophysical Journal. 1901. 1. — K. Doppler-é: Abhandl. d. k. böhm. Ges. d. Wissenschaften. 1842. 2. — W. Elsässer-é: Zeitschr. f. d. phys. u. chem. Unterricht. 1901. 1. — D. Gulik-é: Zeitschr. f. d. phys. u. chem. Unterricht. 1901. 5. — E. Mach-é: Sitzungsber. d. k. Akad. d. Wissenschaften. Wien. 1878. 3. — Továbbá I. Violle. Lehrbuch der Physik. II. 1. Berlin. 1893. — Poggendorf Annalen. 1845: 67. 321., 1876: 158. 287., 1873: 150. 356.

Szekeres Kálmán.

A SÁROSPATAKI FŐISKOLA FIZIKAI MUZEUMA A XVIII. SZÁZAD VÉGÉN.

(Harmadik és befejező közlemény.)

Instrumenta optica (folytatva).

9.*Lens vitrea cum speculo plano contemplandis imaginibus perspectivis inserviens.

10.*Cubus Refractorius ad dimetiendam quantitatem refractionis e vitro in aerem.

11.*Prisma crystallinum longius ad colorum genesin explicandam.

12. Prisma aliud axibus aeneis.

13. Vasa prismatico-vitrea ad refractionem ex aqua in aerem, speciatim: a. 2 in forma parallelepipedi, 3 in forma prismaticis triangularis.

14. Ichtioptra No. 2, sive apparatus ad circulationem sanguinis in piscibus minoribus observandam.

15. Lens magna pro contemplandis iconibus opticis cum figuris partim excipis partim integris.

Optikai eszközök (folytatva).

9.*Üveglencse síktükörrel, panorámának.

10. Hasáb a fénytörés mérésére üveg és levegő között.

11. Hosszabb kristály-prisma a dispersióhoz.

12. Egy másik réztengelyű prisma.

13. Üvegprismák a víz-levegő törésére és pedig kettő parallelepipedon, három pedig három oldalú hasáb alakú.

14. Ichtioptra, vagyis olyan készülék, melylyel a kisebb halak vérkeringését megfigyelhetni.

15. Egy nagy lencse panorámának.

16. Instrumentum ligneum radiorum refractioni inserviens.

17. Telescopia terrestria, inspecie *a)* tubo ligneo rubricolore parallelepipedalis, *b)* tubo bibulaceo Lentibus integris, *c)* tubo item bibulaceo, longior, sed cujus unica tantum Lens Ocularis adest.

Instrumenta Astronomica et Geographica.

1. Telescopium Newtoniano-Gregorianum in capsula nigro corio inducta.
2. Globus Cœlestis.
3. Globus Terrestris cum pixide magnetica.
4. *Tubus Cœlestis cum unica lente oculari.
5. *Micrometrum Kirchianum.
6. Sphæra armillaris, antiqua.
7. *Tubus Cœlestis, cujus tota longitudo est 9′10″15‴. N. b. Huic Tubo curavi applicandum Micrometrum No. 5. Budæ per Thomam Rœssler, opera Rev. Patris Mic. Weiss Astronomi Univ. Bud.
8. Horodicticon meridionale.

16. Refractiós készülék.

17. Földi távcsövek, és pedig egy parallelepipedon-alakú, csöve veresre festett fa ; egy másik lemezpapirból, lencséi épek; egy hosszabb harmadik szintén keménypapirból csupán szemlencsével.

Csillagászati és földrajzi eszközök.

1. Newton-Gregori-féle távcső.
2. Éggömb.
3. Földgömb szélrózsával.
4. *Csillagászati távcső egy okulár-lencsével.
5. *Kircher-féle mikrometer.
6. Armillaris gömb, régi.
7. *Csillagászati távcső, melynek hossza 9 láb, 10 hüvely, 15 vonal. Ezt a távcsövet az 5. sz. alatti mikrométerrel foglaltattam egybe Budán Rössler Tamással, tisztelendő Weiss Mihály, budai egyetemi csillagász fáradozása útján.
8. Horodiktikum. (Az időegyenlet meghatározására.)

9. Atlas novus cœlestis Doppelmeyeri.
10. Mappæ nauticæ, duæ ad pergamenam delineatæ.

Instrumenta Subtilium Effluviorum Magnetica et Electrica.

1. Magnes Armatus, parvus, antiquus.
2.*Magnes Artificialis pollens ultra 6 libras.
3.*Machina Electrica cum 2 Sphæris circa eundem axem ferreum firmatis. Ad hanc pertinent etiam sequentia usque Nrum 13 inclusive.
4.*Lagena Leydensis cum Conductore ferreo.
5.*Catena Magica.
6.*Catena ferrea, 200 pedes longa, de filis sericeis pendens.
7.*Tintinnabula Electrica No. 4.
8.*Gladiatores Electrici No. 2.
9.*Apparatus Fulminis Electrici, ad quem pertinent: *a)* Turricula cum templo utraque lignea. *b)* Tormentum parvum æneum. *c)* Aliquot Raquettæ. *d)* Patella e lamina ferrea, cui infunditur Alcohol. *e)* Zik-zak ligneum laminis stanni inductum, quo fulgur producitur.

9. Doppelmeyer-féle csillagabrosz.
10. Két, pergamenre rajzolt földabrosz.

A súlytalan fluidumok mágneses és elektromos eszközei.

1. Mágnes fegyverzettel, kicsiny, régi.
2.*Mesterséges mágnes, hordképessége 6 fontnál nagyobb.
3.*Elektromos gép, közös vastengelyre erősített két üveggömbbel. Ehez tartoznak a következő készülékek bezárólag a 13. számúig:
4.*Leydeni palaczk vaskonduktorral.
5.*Bűvös láncz.
6.*200 láb hosszú vasláncz, mely selyem-szálakon függ.
7.*Négy elektromos csengettyű.
8.*Elektromos bábjáték.
9.*Készülék villámcsapás utánzására, a melyhez tartoznak: *a)* Tornyocska templommal fából. *b)* Egy darabka rézzsineg. *c)* Néhány rakéta. *d)* Vascsészécske alkohollal. *e)* Zik-zak alakú, ónlemezzel bevont fa.

10.*Fonticulus Saliens æneus, Alcohole replendus ad pducendum fontem salientem Electricum.

11.*Tubuli Expurgati 3, qui Phosphorum Electricum demonstrant et fulgurant Conductori admoti.

12.*Pyxis Electrica, in forma lagenulæ vitreæ, quæ electricitate imbuta, eam diutius retinet.

13.*Tabula vitrea, limbis inclusa ligneis, eidem fini deserviens.

14.*Machina Electrica minor fuseo colore tincta, que lagenam et conductorem habet, sed sphæra adhuc caret.

15.*Tympanum Electricum.

Instrumenta Expansionis Corporum ab Igne et Calore.

1. Pyrometrum Musschenbrœckianum in cistula e ligno Brasiliensi, continentur in ea: *a)* Ipsum Instrumentum cum indice chalybeo. *b)* Bacilli metallici sex: argenteus, stanneus, cupreus, æneus, plumbeus et ferreus, in omni dimensione sibi invicem æqualis. *c)* Ampulla vitrea in qua pro experimentis pyrometricis asservatur oleum, aut alcohol. *d)* Styli ferrei 2, pro firmandis ad pyrometrum bacillis metallicis. *e)* Lampas quadricruris.

10.*Szökőkút fémből, alkohollal megtöltve, az elektromos szökőkút bemutatására.

11.*Három foszforeszkáló csövecske, melyek a konduktorral érintkezve villognak.

12.*Palaczk-alakú elektromos szekrény, mely elektromossággal megtöltetvén, azt hosszabb ideig megtartja.

13.*Üveglemez, fafoglalványban, ugyanerre a czélra.

14.*Kisebb elektromos gép palaczkkal és konduktorral, de gömb nélkül.

15. Elektromos csengettyű.

Hőtani eszközök.

1. Musschenbrœck-féle pyrometer, ébenfa szekrényben, a melyben vannak: *a)* Maga a készülék fémskálával. *b)* Hat darab fémpálczácska és pedig ezüst, ón, vörösréz, sárgaréz, ólom és vas, körülbelül egyenlő méretűek. *c)* Üvegpalaczk olaj, vagy alkohol tartására. *d)* Két vasszög a fémpálczáknak a pyrometerre erősítéséhez. *e)* Négylábú lámpás.

2.*Thermometra No. 2, unum mere Reaumurianum, alterum Fahrenheitiano-Reaumurianum.

3.*Thermometrum aliud capsulare, pro Experimentis expansionis et condensationis mercurii in diversis gradibus caloris et frigoris.

4. Aeolipila cuprea antiqua. Hoc instrumento utor ad dirigendam flammam lampadis, in liquefaciendis tubis vitreis.

5.*Lacrymæ vitreæ et crepitacula vitrea aliquot in pyxidi nucea.

2.*Két thermométer, egyik Reaumur-, másik Fahrenheit-Reaumur-féle skálával.

3.*Egy másik thermometer a higany térfogati változásainak mérésére különböző temperaturák mellett.

4. Régi æolipil rézből. Ezt használom üvegolvasztásra.

5. Üvegcseppek és egynehány pattogó üveg.

Közli: *Ellend József.*

SZEMELVÉNYEK

Bolyai Bolyai Farkasnak Léczfalvi Bodor Pálhoz 1815-től 1825-ig írt leveleiből.

(Közli: SCHLESINGER LAJOS.)

A Bolyai János szülőházának megállapíttatására irányuló nyomozások alkalmából (a melyeknek eredményéről más helyen fogok beszámolni), szives volt Bodor László úr, kolozsvári kir. itélő táblai biró, Farkas Gyula úrral közölni, hogy nagyapjának Bodor Pálnak hátrahagyott iratai közt Bolyai Farkasnak Bodor Pálhoz intézett levelei is vannak.* Bodor László úr szives engedelmével, melyért e helyen is fogadja hálás köszönetünk kifejezését, van szerencsém ezen leveleket kivonatban a nyilvánosság elé hozni. Teszem azt abban a meggyőződésben, hogy a közlendő szemelvények Bolyai Farkas személyiségének jellemzéséhez, valamint azoknak a viszonyoknak megismeréséhez, a melyek közt Bolyai Farkas Maros-Vásárhelyt élt, számot tevő adatokat, és így B. F. életrajzának megirásához fontos anyagot szolgáltatnak.

A szóban levő levelek sok tisztán üzleti közleményt tartalmaznak; az ilyen adás, vevés, kölcsönök és perekre vonatkozó helyeket elhagytam; egyébként a leveleket szószerint az eredeti helyesírásban közlöm. Néhány helyen igyekeztem a szöveg alatti jegyzetek alakjában tett észrevételekkel a levelekben tárgyalt ügyekre vonatkozó, egyéb forrásokból ismeretes adatokat az olvasó emlékezetébe visszaidézni. Az irodalom és művelődéstörténeti adatok nagy részét Széchy Károly professor úr szivességének köszönöm.

---

* Bodor Pál, a kolozsvári «delegata provincialis cassa» ellenőre, a maga korában előkőle mivelt és közszereplő ember, ki az irodalomért és szinészetért élénken érdeklődött. A kolozsvári *Nemzeti Szinház* épitésénél a bizottság pénztárnoka volt és sokat fáradt ennek az első magyar szinháznak létrehozásában. Neve a B. F. és Gauss levélváltásában is szerepel (Domáldról 1802 sept. 11-én kelt B. F.-nak Gausshoz írt levelében), a hol ugyanis B. F. akkori czímét így adja: «Bodor Pál úrnál a' belső közép utczában» (lásd: Briefwechsel zwischen C. F. G. und W. B. herausgegeben von F. Schmidt u. P. Stäckel. 1899, pag. 44.).

A levelek külső oldalára illetőleg külön borítékokra írt czím legtöbbnyire ez:

a Monsieur
Monsieur Paule Bodor
Controlleur de la Caisse Provinciale
de Transilvanie
a Clausenbourg,

egy borítékon* pedig ily felirat olvasható:

Tekintetes Létzfalvi Bodor Pál Urnak
barátságos tisztelettel
Kolosvár.

1. Maros-Vásárhely 1815 d. 28 Xbris.

. . . .

2. Kelet nélkül.

Kedves Barátom!

A' tizenegyczer rhf. váltóba kevés realis erő van az én életem meg-nőtt terhét felemelni, hanem ha . . . ? . . . ; a' volna a' kereskedés, de hivatalom gyenge egésségemmel combinalva engemet magamat alkalmatlanná tesznek, más néhány volna, a' kivel compániába állhatnék, de én úgy lévén mint egy lövő tzél, a' mellyen a' kinek tetszik gyakorolhatja magát, félek meg tsalnak; a' ki pedig meg nem tsal annak magam nem hiszek, az az hozzám hasonlónak gondolván nem hiszem arra valónak — Oltsó is horrende ez a' ház tizenegy ezeren, gondold jó pénzbe, 's gondold rég mit ért. Arra nézve a' mit a vevők mondanak romlottságára 's sok költséget kívanó reparatiójára nézve, mintegy héttel ezelőtt irtam — A' Napom nem adja tizenöt (számmal 15) ezer rhft (német florin) alol: mondja, mennyibe került épitések, alol pedig a' solid épület megvolt. Azért akarmillyen sürgető is az egész fatalis állására nézve házamnak, tovább nem mehetünk ennél . . . . . .

Jánosnak a' hegedüje a' szüreti útba tok nélkül eltört; igérem hogy a' Tiédet útra nem viszem ha ad summum másfél esztendeig minél hamarabb ide adod; épen vissza küldöm: azon túl nem kell, mert akkor viszem Jánost Gausshoz. A' minap elkérte Székely egy musikalis quodlibetre, 's őtet a' primo mellé tették mással együtt . . . .

---

* a 3. levélhez tartozón.

3. Kelet nélkül

Kedves Barátom!

. . . .

A' Napom Néked a ház eladására 's minden egyébb bajaira nézve Itélö Mesteri Plenipotentiát küld; a' Báro viszi, 's ugyan a' Báró látta a Mutua fassiót, 's azt is, hogy az Ipoméknak nem jutott a' házból semmi, tsak bizonyos pénz summa, 's magát a jószágot pénzzel vették örök árron . . . . Neked sok a' bajod, distrait vagy: de szedd össze most erődet, 's tégy egy áldozatot a' barátságnak

. . . .

olvass a' Copertán!

[A boritékon írtakból.]

A mig eladódik a ház, hogy hiába ne heverjen, kér a' Napom, hogy maga idejébe add-ki, a' kinek tetszik Plenipotentiád szerint tsak 1° maga kivánja hogy Kézsmárkinak ne add, a' ki a' Napom bosszujára eröszakosan vágyik oda, 2° nem tudjuk marad-e Harsányiné; Fenigsdorf azon esetbe ha nem marad (a' mint irja Fenigsdorf hogy hallotta) kéri az alsó házat; ha meg-marad úgy kéri a' felsöt — igazitsd legjobban —

Leányod itt van, nyavalyájára nézve némely napokon jobban, egyébként jól, 's talán inkább otthonn, mint nállad — Meg lehet hogy még electrica cura alá jö . . . Az eladással jól volna sietni, azért hogy a' Nemesség a' subsidiumot megfizetvén, a' pénz megritkul — de sietni tsak haszonnal kell per se — Most præsta Te virum!

3a. Kelet nélkül.

Kedves Barátom!

. . . .

Ha írni nem érkezel, tedd csak copertába mint a' minap,* ha pedig érkezel most vagy ezután, írj valamit, hogy halljam még szavadat, a' mig még szóllhatsz és én-is hallhatom — a' miolta nem halljuk többé a' mi el-felejthetetlen barátunk szavát — még a Tiédet se hallottam — mintha vele együtt némultál volna el — Szeressük egymást a' kik és a' míg még itt vagyunk — Kedvesseidet ölelve vagyok végig

barátod Bolyai Farkas

4. Kelet nélkül.

Barátom!

Tegnap ment ismét hozzád két levelem egyszersmind, a' Baró küldötte-el, legyen ez pro superfluo. Prof. Dósa el hozná, ha Te érkeznél kül-

* t. i. egy «quietantiát», a melyről előbb szó volt.
[Kiadó észrevétele.]

deni nagy egrest és egy pár Mósanszker 's vagy két három apró piros muskotáj körte tsemetét; ha nem lehet küldj oltóágokat belöllek, ha azt sem érkezel maradjon el mind, tsak a fődolog igazodjék-el.

A' Házat kész pénzzé változtatva minél hamarabb a' Baró kezibe kellene a' megirt módon szolgáltatni;

. . . .

Ugyan tsak említett levelembe is eléggé megírtam: Okosságodra bízatik, és ra állott a' Napom sok kesergések közt, hogy ha tellyességgel nem lehet felyebb tizenkétezer német forinton is add-el; de az Ur obligatioira tsak félig meddig állott in extremo casu és ha az Ur excellens fizetö 's peremptorius terminust teszen — A' contractus talán nem a' régi Bankó forintba van — igazitsd okosan, mert Urral nem jó tseresnyét enni — . . . .

5. Maros Vásárhely 1816 15. Jan.

Kedves Barátom

Nem régibe köszöntettem Néked az uj esztendőt egy külömbet nem érdemlett hypochondrisch levéllel; ha most kellene irnom még hypochondrischabbat irnék . . . az idö tsak ezt a' fekete Cocythus partjára illö burjánt nevelni foly — a' mindennapi élet tovább nem györzhetö gondjai nem engedik által álmodni az életet, durván serkentik a legkisebb szenderedést 's ébren pedig puszta hideg 's ékesség nélkül való a' reménység elhervadt mezeje, korok állanak egy-egy éjszaki fuvallat — 's a' hó szállingozik — Már túl kivánnék lenni, tsak a' van megnyerve a mit el-hagytunk. — Qui studet optatam cursu contingere multam —

Tudosits a' mi dolgainkról: most tölled várunk egyedül, légy szabaditója a' mi házunknak . . . Különben oda vagyunk, ollyan óráim jöhetnek, hogy nem tudhatom mit tselekszem úgy tetszik némellykor tsak egy uncia kellene a' rég emelt má'sákhoz —

Leányod most stabiliter jobban van —

A' Bárónė is minden szép gyermekeivel frissen van; mostanság komor lévén kevést láttam. A' Báró a' mikor ez a' levelem meg-menyen nem lesz ott, a' mint tudom a' Barónétól, tsak ugyan azt hiszem a' nélkül a' levél nélkül is fogtál tudositani.

Servus

barátod B. Farkas.

6. M. V. 1816, 23 Jan. Ezt a levelet, néhány napoktól fogva naponként induló alkalmatosság késleltette, most Postan küldöm.

Kedves barátom!

Postán vett leveledre válaszolok.

Leányod iránt ne nyugtalankodj; ha meg nem akarod sérteni a' Bárónét azzal, hogy jósága iránt meg győzödve nem vagy — Vajda, Lang tanitják s' tanitani fogják, beszéltem velek, meg-vannak elégedve vele — Ö szembetünöképpen épül, hízik pirosodik, 's nehányszor láttam úgy, hogy semmi rendetlen mozdulatját nem láttam, tegnap már egy keveset observáltam de koránt sem annyit mint ez előtt; per se újjra elé kell jöni, 's tágasuló intervallumokkal gyengébben térve vissza végre reménylem elmúlik, a' mostani nagy Reitzbarkeitjà apadása már magába orvosság nélkül is fogna segiteni rajta — még az electricitást nem probáltuk, de az is meg leszen, mert közönségesen javalltatik a' Weitantz*-ba ujabban sokkal jobban láttam.

A Báróról nem írsz egy szót is; azt se láttom hogy az ide való Minoriták Præsidensétöl Fénigsdorfhéz accludált vagy egy itt censurázott Szabó Ádám nevü diáktól küldött levelemet vetted volna. A' földekröl se tudositasz; a' Bárótól küldött levelembe irtam, de nem válaszoltál: ugy tetszik Te is vagy ollyan distrait mint én — 's itt kell ebbe a' nem mi világunkba nyomorognunk mind a' kettönek —

. . . .

Nagy György a' mult vasárnap prédikállt itt, és minthogy bizonyos tekintetbe méltatlanúl szerentsétlen 's szép szépet szépen mondott, nagyon fel kapott. Tiszteltem a' Bárót, mind frissen vannak Domokosék; 's Domokossal déakúl készüljön beszélni, halad — már conjugista egy Collégyomi classist el-hagyott. Servus — vagyok végig

barátod B. F.

7. M V. 1816 23 Febr. — «Össze hányva irom ezt a' levelet a' Báróénál sietve, Examenbe kell: a' Chaosból kiválaszthatod a dolog értelmét.» . . . .; a válaszom ez, hogy a' Napom (meg én is) a' Summát erőssen kevestelli . . . . bár tsak tizenöt ezerre fel lehetne vinni (értem rhfrtot) — a' mi az Örmény beszédeit, a mellyekkel a' portéka betsét (a' mellyet mint eladó nevelni szokott) mint vevő kisebbíti, arra nézve annyit irok 1° hogy az épület (értem az elsőt) ez előtt hét esztendőkkel merőbe meg-'sendelyeztetett, söt a' Dachstuhl is merőbe ujjan tsináltatott — a' sikátor felől való

* Veitstanz — Vitustáncz. (Kiadó észrevétele.)

hasadások is régiek, az ugyan rossz argumentatio, mert a' vén éppen azért hogy régi nem tart, de ez olyan forma gyengeség a' melly az idő próbáját ki állotta . . . .

. . . . . Tegnap János a Fö-Curatorok engedelméből a' deákokkal a' Physicából eminenter censurázott; azon kivül hogy az Auctorból ad aperturam másoktól kérdeztetett, felelt a Sublimior Physicából mindenütt nagy készséggel, tisztasággal és *modestiával* — felelt pedig deákul. —

A Barót nem hiszem találja ez a' levelem, mivel várjuk, ha ott van perse tisztelem; 's mind azok a' mellyeket tett érettem, 's tettél 's tészsz Te, kitörölhetetlenül fel vannak a' baráttság Conto könyvébe irva. Servus, sietek Examenbe. Vagyok végig

barátod B. F.

8. M. V. 1816, 26 Martii.

. . . .

A' leanyod hízik, jól tanul s' jól viseli magát; . . . .

Ha Lengyeltöl küldöttél volna egrest vagy nehány körte tsemetét, jól tetted volna: denique ollyan sokkal nem teszlek még distraitbbé — a' fö baj most a' ház; elég ha azt eligazitod.

. . . .

9. M. V. 1816, Martius vége táján

Barátom!

. . . .

A portékák per se a' házzal nem mennek által. A' napom a' ház eladásáról való decisio megirása után, olyan gyász szint váltott, mint egy keserves egy halottas házba — szinte — szinte megváltozott — ugyan tsak meg-maradt már tsak vidd véghez, ne hogy még megváltozzék.

. . . .

. . . A Cursus javul ugyan, de tsakugyan még egy forint kevesebb $^1/_3$-nál, és Göttingába ötöd félszáz forintunk teszen százat, úgy hallottam.

10. Kelet nélkül.

Kedves Barátom!

A' ház eladását* a' Bárótól tudtam meg a' Te leveledből, a' Napomnak megmondottam, lassanként ugyan, de úgy a' mint van; a' Bethlen Elek

* A szóban forgó házeladásra nézve Bodor Pál iratai közt megvan az árverés jegyzökönyve melyszerint:

«Ezen folyo 1816[k] esztend. Febr. 12[k] napján a' néhai Benkö Joseff úr

Contractussát elébb nem akarta semmiképpen acceptálni, mig nem mondottam, hogy változtatni nem lehet és Te bizonyosan tudod, mit tselekedtél, végre megnyugodt, 's a' réam kiömlött zivatar megtsendesedett — tsak egy szomorú elmerülés maradt-meg estvig, mellybe az azon vén falak közzé temett esztendök vidám tavaszait 's komor teleit elválasztotta azon háztól, s' a mennyire lehet, ide által költöztette — én magamat helyébe tettem 's

---

B. közép utczai Háza kotyavetyéztetése elkezdetvén folytattatik ilyetén módon:

Első felkiáltás — 6000 Rfr. . . . .

Continuata die 13a Febr.

. . . .

Ezen fennebb meg nevezett Háznak Licitáltatása ezen follyo 1816ik Esztendö Aprilis 4kén általunk alább irtak által follytattatik következendö módon

. . . .

Szenkovits úr 12500 Rfr.

Ezen Summában senki többet nem igérvén le is doboltatott Szenkovits Jakab úrra.

Melyről bizonyitunk Magyari László és Máteffi Joseff Licitator commissariusok. Én magam is megösmerem Szenkovits Jakab.

8000 Rhforintot letészen, 4500 Rforintot pedig ezen Holnap 24kén. Szenkovits Jakab úr Felesége Szábel Mária.»

A «Benköné végső számadás, 30. 7bris 821,» feliratu acta szerint:

«Az özvegy J. Bachmann Juliána özvegy Benkö Joseffné Asszony Házát attam el mint plenipotentiarius 12500 frton.

Készpénz		8470
's GBethlen Elek Ur contractusán	4000	
's ennek 30 frtig restans interess	30	4030
	Summa	12,500.»

Említésre méltó a következő levél is:

«Kedves Bodor Ur!

Ezen levelem által facultálom és kérem arra, hogy a' már el-adott házom árrát, minél elébb lehet, kész pénzül fel-véve M. B. Kemény Simon Urnak adja által. Köszönöm az Úrnak házomhoz tapasztalt szivességét, 's vagyok

M. Vásárhelly 9k Ap. 1816

elkötelezett szolgálója
Bachmann Juliánna,
özvegy Benkö Jósefné,
maga irni nem tudván más kezével.»

A levelet, az irás szerint itélve, Bolyai Farkas irta.

[Kiadó észrevétele.]

hozzá calculaltam a' vénséget és az asszonyt, 's türtem; tsak az is sokat tett, kivált a' változó asszonyi természetbe, hogy az ingható viz egy szóra meg-meredt; de magába is az az érzés is, hogy már kéntelen lakik itt; a' szeretet édes kötele is, a' házaságba bilintsé válik — estve P. Dósa éppen akkor küldi-bé leveledet, mikor együtt beszéllgettünk; kérdezvén maga hogy nem tölled jött-e, fel-kellett olvasnom, el-hagyva a' végen észre vett kereskedés planumát: erre még jobban meg tsendesedett; meg-győződvén, hogy te a' Magad neve alatt a' pénzt Bethlen Eleken exequálod........

Te akarmit jöjjön-ki, meg tetted a' Te kötelességedet, a' mellyre nállom is mindig calculálhatsz; tsak azzal a külömbséggel, hogy annyi fáradságra (ebbe a' nembe) a' mennyit Te tettél és tenni akarsz, alig vagyok alkalmatos. A' mi a portékákat illeti: mindent a' mi portéka név alatt jöhet, mig rész szerint elhozatjuk, rész szerint módot találunk eladására, valamiképen tétesd-el: reménylem Szentkovits ur is ad hellyet neki; mond-meg, hogy azt mondja a Napom, hogy annál a' háznál traditio hogy kints van, egy magtalan gazdagé volt, a' ki a' pintzébe elásta, 's ha meg nem volna már, a' Napom a' Contractust super 4030 tellyességgel nem acceptálna

. . . .

Okaim ezen adósság kifizetésére 1° Az hogy egyik még 1806beli d. 30a Aug., akkor volt 300 rhft. devalválodott 187 rhftra 's 30 xra; interresse restal 1811 15ik Martiitól fogva, tehát ötszer véve 11 rhft és ugyan annyiszor 15 x.

2do G. Kendeffi Adám önként a' fiamhoz azzal a' gratiával volt, hogy Göttingába Gauss-hoz lejendő fel-menetelekor segittségét igérte, és én minden elmuló ifjui fermentatiói mellett is, merek épiteni az ö szaván; a mellyet ritka Urról lehet mondani: ezért szeretném e' részbe is nem lenni hozzá háládatlan, és irántam morositásommal nem hüteni.

11. M. V. 1816 9a Apr.

. . . .

A' kajszin baratzkokat köszönjük: Szotyorinak* még ma elfogom küldeni, magam még nem járhatok ki; ha a ház-eladás Téged annyira el nem foglalt-volna, egresekért 's körte oltványokért alkalmatlankodtam-volna, már késö 's jövendöben tám én is termesztek. B. Bornemissza nem küldötte-el az Englisch Carolint 's ki most nem járok; azt tartom egyenesen küldötte-el mert parolás ember; sokszor hivott ebédre; egész ember a'

---

* Bolyai orvosa v. ö. Koncz: A Maros-Vásárhelyi ev. ref. Collegium Története, pag. 340. [Kiadó észrevétele.]

maga nemébe. Acht apró piros muskotálj körté agakat bár, ha casu quo jö valaki küldj nékem; már az egres késö . . . .
Servus Vagyok igaz barátod Bolyai Farkas.

12. M. V. 1816. 21. Aug.
Kedves Barátom!

. . . A Báró tsak nehány napra vitt ki Vétsre, 's majd az egész Caniculát eltöltottem — A' millyen jól esett a' szabad levegö a' tömlöcz után, ollyan bajos a' szép kék égtöl és az édes zéfirektöl megint elválni — hogy onnan Neked nem irtam bánom, de mikor Kezsmárkinak 's Lengyelnek és G. Kendeffinek írtam, azt hittem hogy borvizen vagy, mikor a' Báróhoz felvittem, akkor a' Báró mondta, hogy nem hiszi, hogy borvizen légy, de már akkor az iró spiritusom el-fáradt volt, 's irtam is volt Lengyelnek, hogy azon esetbe, ha ott vagy miket mondjon neked.

Lili az elött sokkal borvízre ment volt: ajánlottam D. Matyusnak 's minden olyasnak; ö egy ártatlan még gyermek, egy kis könyörül állást irok azokhoz a' mellyeket ez elötti levelembe írtam; Vétsen Hertzeg Titi declamalt Schillerböl nekem, 's a' többi között a' *Freude schöner*-t, 's Lili is mondta; én látván, hogy minden accentus nélkül mondja, 's mondom hogy Te azt nem érted — nem biz ö azt felelte, tsak a' te parantsolatodra meg-tanulta; én osztán magyaráztam neki belöle 's úgy tetszett mintha újj világ nyilt volna fel elötte; miért nem magyaráztad meg neki, ha megtanultattad? vagy, miért tanultattál ollyant a' mit magyarázni nem akartál? — de töllem tudta meg, hogy azt érteni is kell —

. . . .

El hidd! hogy az idén meg tanultam a' pokolnak még egynéhány újj vidékeit 's hogy a' Caniculát is el-lézengeltem, enormiter distrait vagyok . . . . . Servus vagyok végig
hiv barátod B. Fks.

13. M. V. 1816 3^{t} 9^{bris}.
Kedves barátom!

Veszem azon leveledet, mellybe a' Pataki Mihály Contractusát zárva elküldötted: én küldöttem volt neked ugy tetszik 7^{berbe} vagy Augustus végén egy innen a Sz. Péteri templomhoz oda ment P. Minoritával egy levelet; igaz, hogy ugyan akkor küldöttem Kézsmárkinak is; azután küldöttem 8^{ber} közepén accludalva Lengyelhez egy Néked s' egy Kezsmárkinak szólló: magam is éreztem valamit benne, s' mässzor vigyázok: most reményelem mind a' kettöt vetted, 's a petsétnyomómat esmered; rettenetest alkalmatlankodik az az ember, szünetlen panaszol, hogy én neki nem irok, mintha ollyan kedves volna az ö Correspondentiája, nem akadály az élet folyásába;

. . . .

Én Domáldról szüretről tegnap elött éjjel érkeztem meg: kilenczed-fel veder vad-alma levem lett.

Itt hallottam a' Báró esetét: képzeled mitsoda változást tsinált bennem: egyszersmind hallottam azt is, hogy hellyre állott, 's még is úgy elesett a' kedvem az egész élethez, hogy sok okoskodással kell annyira felvonnom az órát, hogy mutassa-ki a' hátra levö szomorú napokat. — mintha a' mi társaságunknak a' feje esett volna el; én tegnap mind bujdostam mint egy pusztán, vagy ollyan Stimmungba voltam, mintha temetést kisértem volna; illyen közel még nem esett a' golyobis, 's éppen a fö körül járt; a' te cum spe lévö hypochondriád se hiszem, hogy az enyimhez közelebb ne jött volna: nem tudtam, hogy éppen annyira függök a' Bárótól, 's hogy az egész világ egynehány emberböl áll, 's azokis mind meg vannak sententiazva; de meg szünök, mert neked sints kedvetlenségre szükséged, inkább van nekem vigasztalásra, a' mellyett Tölled a' ki a' mint leveledből látom Csombordot megjártad eddig elvárok; de ne kissebitsd a' rosszat, hogy megtsalj, inkább többet szenvedek igazán, mint örvendek megtsalva. Ha diligentia nem volna 's még úgy is ha szükség volna, szeretném Csombordra kimenni, jóllehet én is az üveghez hasonló kényességü lévén, könnyen eltörhetném az úton — jó hogy dolgom van, tanitok, 's nehány hellyre kementzéket tsináltatok, különben most mélyen bé esném a' hypochondriába. egynehány-féle furtsa kementzéket láthatnál — ha annyi szabad idöm volna, 's az élet gondjai álmáimból fel nem serkentenének, el-merülnék valami Mathematicumba vagy poëticumba; igy a' sem lehet; 's meg vallom megis ijjedtem a' Báró példáján ettöl is, a mennyibe meg tehetem, a' vita vegetativához igyekszem ezután közeliteni.

. . . Van öt szomoru jatékom készen,* az elsöt is megváltoztattam (azon hogy készen perse nem perfectum ad ungvem-et értek úgy soha se lenne készen); circiter ötven arcus irásba; 's van valami mathematicum; az is lett annyi; am azokat sub anonymo kinyomtattatom; hogy tsak nehány tudja, a' kit én akarok. (a' kik közzül némelyik in specie Lengyel tsak azért tudja, hogy abba a' Concursusba kéntelen voltam közben járónak kérni s' azonban taciturnus embernek esmerem). Elébb a' tragœdiakat egy darabba; B. Kemény János igérte, tsak az imprimaturt rá tétessem: hogy mehetne e' véghez ugy hogy ne castrálják, hogy meg ne nyomorékitsák gyermekeimet? nints is meo judicio semmi ollyas — 's mi volna a' legrövidebb útja? s mennyi idöre eshetnék-meg? Haromnak a sujetje histo-

---

* l. a 16. lapon álló jegyzetet [Kiadó észrevétele].

riai; ha tudnám, hogy serium az a' Concursus dolga béküldeném; irtam Lengyelnek iránta, valamint az iránt is, hogy a' melly kettöt bé küldöttem küldje vissza, az elsö bizodalmas alkalmatosságtól, hogy az elsöbb béküldöttet is igazgassam meg, 's a másodikat egészen megbövitve együtt a' harmadikkal béküldjem ha szükséges akármikor mert készek. Tudositts ha valami tanátsot tudsz adni.

. . . .

Vagyok örökké barátod.

A melly leveleket irunk egymásnak, 's veszünk egymástól, jó lenne feljegyezni kalendariomba 's ugy tudositani rólla egymást.

A B. E.-nél lévö pénzzel való planumunk egy kis reménységet nyujt: az én különben nem rossz asszonyaim furiák mikor nints pénz, 's horrende kínoznak, calculalni pedig absolute nem tudnak; szünetlen fö a' fejem 's a' mennyibe lehet gátolom ezer duzzogások közt a' kitsi kutfö elfolyását.

14. Kelet nélkül.

Kedves Barátom!

Késön veszem azon leveledet, mellybe megirtad, hogy Csombordra méssz; már mentek volt a Zeyk Jánosné bagásiáját hozott volt engem is le-vijendö lovak; Frater! azon kivül hogy a' most is hitvány egésségem ugylehet penitus el-romlott volna, ollyan okaim voltak, hogy talán jó hogy a' leveled késön jött, 's leg-alább annak a febrisnek a' mellyen által mentem a' mikor a' menésröl lemondottam, nem adott több mérget — 's az is meglehet hogy az megszéditve elmentem volna, 's most vissza jövet itt mind iszonyu sokkal fizetném az eltölt jó idöt.

Kihozattam volt az oda bé-küldött piéceket; sokat corrigáltam bennek mert a' historica fides ellen iszonyukat hibáztam volt és nem olvastam Criticát — meg igazitva a' mennyire mostani szememmel tudtam annyi idö alatt a' mennyi volt réá, küldöm pótolva egy harmadikkal a' melly elöl van kötve be-tsinálva most ezen levéllel együtt egy mappa ládaba hozzád (ha el nem küldöm, a' copertára rá irom; ugy a jövö sokadalomra halad azt gondolom): ha tetszik olvasd meg; minden esetre pedig magad add által Lengyelnek, ha tetszik ö is megolvashatja; tsak hallgassatok: perse — a' mi rossz benne inkább gyaláznának tsak a nevéért is, a' jóért tsak tzélnak tenné ki magát az ember. — Rossz kedvem van most, 's az egésségem nints jó statusba; nem tudom okaimat elevenen elé adni; de mind az öt Tragœdiámnak, melly le van már irva, 's egy darabba fog ki jöni, a' præfatiojába ott van mentsége az Anonymusságnak. A' mellyet te láttál, meg van egésszen változtatva; több e' féle bolondságba elegyedni nem is fogok akár micsoda spurius appetitusom jöjjön is; visszatérek a feleségemhez a' Mathesishez, 's abba adok ki holmiket a' mi van de nem fogyasztom erömet ujjal. — A' mi a' poëtisálást illeti; éppen bolondság is volna, a' mig nem látom meg magamat (az öt piéccel) a' tükörbe, hogy millyen vagyok! tsak addig tart a gyönyörüség a' mig tsinálja az ember, mint a gyermeket, azután majd tsak a' van a' mit féltsen az ember . . . . .

Kézsmárkinak kérlek, küld-meg a' levelemet. Lengyelnek pariter: per se egyik sem elveszni való; még nem tudom bizonyosan a' láda meg készül-é holnapra, azért meg lehet hogy a piécek elmaradnak a' legközelebbi bizodalmas alkalmatosságra; de mindenként szükséges meg-menni levelemnek; hogy ha casu quo periculum in mora volna, ö tudositson engemet. Lengyelnek, egy igen jó vonása az a' többi között, hogy halgató, és egyforma, 's sok Comissiót el-igazít panasz nélkül — ritkán kap az ember ollyant mint ö az emberek közt; az esze hellyes és világos a' féle meleg nélkül, a' melly minket eléget. Servus! Töltsd az újj esztendőt azon ködöktöl kiderülve a' mellyekkel én kezdem.*

15. M. V. 1817. 4. Januar.

Kedves Barátom.

G. Teleki József úr Ő Nagyságával küldöttem egy Néked titulált mappaládát, bé varva és azon fellyöl papirossal tsirizalva, noha mindezt irni (észrevevém magamat) szükségtelen, mert ezt Ő Nga tudom maga adta kezedbe: Lengyelnek 's Kézsmárkinak szollo leveleimet 's a' Magadét is benne kaptad az egybe kötött 3 Dramaval együtt, mellyet a' Concursusra küldöttem hogy béadd Lengyel által. Meg ezeket adván hozzá: 1° A ládát tedd-el; hogy annak idejébe, mikor talán cum longo naso vissza jő, buhassék-el bele. 2° Ha a' Báró arra jár, ne lássa: mert tudod millyen scrupulosus, 's ha egy szikrát észrevesszen ad minimum egy várost lángba lát.

3° Ha érkeztél elolvasni reflectálj rolla; ha nints idöd ne vesztegesd vele; circiter egy mást én is tudnék: in specie Mahomedbe igen hosszak a' jelenések 's kevés a személy; Mahomedet 7berbe irtam letzkék közt: egész holnapba mind Besztertzei szilvát ettem, föt ételt tsak néhányszor — 4° Kemény Simonba a' IIdik Felvonásba 9dik Jelenésbe vannak *az elébbiek, Öreg Kemény és az Alvezérek:* kérlek az Alvezérek neveit itt *a' Jelenés elein* mind vakard-ki; lehet hogy magam ki-vakartam; de tsak más hellyeken fogtam meg igazitani sietten.

5° Tudositts mikorra lehetne ott Kolosvárt kinyomtattatni Őt in summa irásba 50 arkusbol álló Tragœdiát? Lehet-e hiba nélkül? A' correctio

* Tartalma szerint e levél 1817 jan. 1—3-án kelt (kiadó észrevétele).

hogy mehetne véghez? Mennyibe kerül? Mikor kellene es mennyi pénzt letenni? Mit gondolsz, hány exemplárt kellene nyomtattatni? Most az öt egybe kötve (egybe akarom nyomtattatni is) itt van recension, mert itt is lehet, Aranka úrnak 's a' Plebanusnak Diplomájok van. — Mathematicumot per se nem lehet ugy-é ott?

5° Az orthographia fatalis dolog a' Magyarba; a Cancellarián alig van nehány, a' ki írni tud; minden magának külön tsinál: ha tudsz te nehány ollyas szók irására nezve, 's érkezel, tudósitts; mert te már sokat nyomtattattál.

A' Tzigány s^et hogy irod? így-é 's vagy
s', 'sák-é? vagy zsák?
mennjen-é? vagy menjen? per se nem mennyen.
audiat: halljon ugy-é? nem moriatur, haljon.
hallgatni-é vagy halgatni?
egészen-é vagy egésszen?
mellyen, millyen, ollyan, hellyen, méjj, mijj, mely, oly, hely, jó-é?
a' vizirányú vonás per se öszve-köt, két ollyan vonás pedig ugy mint = vagy || a' rend végén a' szót szakasztja meg, Gedankenstrich pedig lehet . . vagy . . . vagy . . . . Et cætera nem jutt hirtelen több eszembe.

Sokan irják *után* 's több efélét két n^uel exgr. *utánn* absurdum — Irj a' mi eféle eszedbe jut.

Ködös idö van künn is, itt benn a házba is: most tsak jarmat huzok, nem is fogok az idén semmibe részesedni, sem az egésségemre nézve nem merek, mert ollyankor sokat pipázom; sem a' kötelesség nem engedi; 's jaj nékem! Ne vigy a' kisértetbe! De nem sokáig szenvedünk már. —

16. 1817, 2 Apr.

Kedves barátom.

Egy keserüség nelkül való szelid declaratiot, nem egy barát szivét kereső szurást érdemlettem; elég nyomorult vagyok én; ha a' barátim is sebezni kezdenek, úgy-is kopár puszta kézd lenni a föld reám nézve — majd tsak a fagyas kötelesség tart itt, 's még az is (ugy kezdek itélni) fel nem éri azon tul azt a' mit szenvedek — mintha a fiamat lántznak adta volna az én sorsom mellyel a' tömlöczbe tartson —

Felejtsük-el mind a' ketten: az én szívem nem vádolt Téged; Te azt vádolod; az én tonusom más volt; egy bizonyos imprudentiára vagy magam se tudom mire magyaráztam; hidd-el! hogy a' hibát is fedezi a' szeretet (a' mint Szent Pál mondja) — a' Báróné mondja ma is, hogy G. Lázár mondotta, hogy Te mondottad; én Lázárral nem beszéltem, 's ha beszéll nék se hinném már most. Magam tsak azokkal közöltem, a' kikkel a' Recensióra, (melynek még útját se tudtam) 's a' többire nézve absolute kéntelen voltam — és végig meg-állok abba, hogy sub anonymo kivánjak maradni, 's egy circuluson kivül, bajoson terjedvén, ha valaki gyanakszik is, az egész dolog brevi el-hal.

A' testvérem se tudja, pedig ott közel nyomtatják Szebenbe, Zeyk urnak se mondottam ; most nem régen mástól tudta-meg.

Ugyan tsak ha még meg bolondulok, lesz eszem ; ha a' gondok kedvetlen ostroma ellen nem látok a' siron kivül más asylumot, 's néha lesz vagy három heti Otiumom, hogy az álmok országába futhassak — még kevesebb szám fogja tudni — leghihetőbb hogy senki sem, 's (a' mint most tselekedném, ha már el nem szeleztem volna) el-égetem mikor az álmok közzül vissza térve, meg-látom hogy a' sem valóság a' mit onnan hoztam . . . . Servus ! olts ! érezd a tavasz örömeit ; nekem az is Wehmuth-ot tsinál . . . hypochondria az igaz, de meg látnám kit nem tennének hypochondriatussá az én környülállásim — a' nyaron mikor a fiamat viszem, arra menyek. Vagyok végig igaz

barátod B. Fks.

17. M. V. 1817, 3ti Julii.

Kedves barátom !

. . . Bizonyos idegen tudositásbol tudom mástol, hogy a' meg visgált darabok közül egy rosznak a' többi közönségesnek itéltetett, s az utolsók között volt Kemény Simon, a' mely hihetőképen . . ? . . volt.

Az olta még mik vizsgáltattak meg, nem tudom: éppen tsak pénzt szerettem volna kapni, egyébb iránt keveset alterál : mert a midőn vesztettem azt nyertem, hogy még nem szerfelett késön, minekelőtte meg tovább tévelyegtem volna, meg mutatták, hogy nem jó felé menyek — Nékem tsak a' kell, hogy azt tudjam meg, hol használhatok leg többet, 's ha meg tudom mekkora az én radiusom, akár mely kitsi az, ditsöségnek és nagyságnak tartom azon tul nem vágyva írni keskeny abrontsomat — Ennek meg tudására még többet teszen ezen ide zárt *Onus naturae depositum* mellyet a' Publicum eleibe tálaltam, magam el-buva ; volt gyanu itt rollam, de látván indifferentismusomat, mellyel most vagyok iránta, más felé járnak a' találgatások, 's tsak Te ne hidd, hogy már publicum, azért hogy nehány embernek tudni kellett (mellyek közzé Hegedüst te tetted, a' neveket tsak ugyan ha Te meg nem mondottad, ezt nem tudja, én leg-alább meg-nem mondottam hogy nyomtattatok) Vigyázz ha valaki ugy szollit-meg (próbálgatva !) mint bizonyosan tudva, el ne árulj mert ott is 's szintúgy mint itt, mikor egybe meg-nem bizonyosodhatnak, más felé indulnak.

Mi tzélom lett légyen még egyébb, hátul azon fellyül-irás alatt *Hibák és* *igazitások* megolvashatod. A' hiba sok, és sok helyt az értelmet infamiter elgázolja — Az Erratának Erratáját nem tehettem; a' munkát az Errata, ezt az Olvasó igazitsa meg. A' mi kevés betse volna, ebből is a' nyomtató hibái sokat el fognak venni.

A fiamat ebbe a' szük időbe semmiképen fel nem küldhetem. Lili 's a' Báróék mind frissen vannak! Vagyok álhatatoson.

Kérlek az ide zárt paquetát küld meg Lengyelnek: Ő per se tudja; neki van benne egy magának, egy sub Anonymo Döbrenteinek, Lengyel adja meg, és az irásomat onnan kiveszi; a' harmadikat sub Anonymo adja ő által Kendeffinek hogy prænumeráljon.

igaz barátod B. Fks.

Ebbe a' mellyet neked küldök nehány szarvas hibát az Errata szerint megigazitottam: a' kézirásban van a' hibáknak egy része, tsudálkozom a' le-iron is, hogy tudott ollyan *non senset* írni s' magamon, hogy meg nem láttam — ugyantsak a' typotheta 's a' Corrector se voltak jobbak nállomnál —

A' fiamat nem viszem az Ingenieur Academiába, a'hol bizonyosan mostanság ollyan lumen nem lett-volna; vettem Bodokinak igen emberséges válaszát: azt irja hogy a' H. Károly fiát se veszik bé, ha annyi Mathesist tudna is mint maga Hauser,* a' IVdik Classison fellyül: és igy kellenék meg circiter 8 ezer rhf: Consequenter 7berbe subscribáltatom. Magára el készült a' Hauser mind a' 3 darabjából censurázni Bétsbe németül mint a' víz. Armuth legt Bley. —

18. 1817, 9ber

Kedves Barátom!

Tsak a válasszal késtem, meg-akarván a' Posta-költséget kimélni: de a' dolgot azonnal el-igazitottam: instántia mellett beadtam a' Copiát, a' terminus után jött, de bé vették, fel irták, és mihelyt az egész Commissio egybe gyül, az Instantiára resolutio fog jöni, mellyet kezedbe küldök; egyébb Testimoniumot most nem adnak; de az iránt tsendesen lehetsz,

* rectius: Matthias Freiherr von HAUSER, Oberst des k. k. Ingenieurcorps (1704—1826). Utóbb említett munkája «Analytische Abhandlung der Anfangsgründe der Mathematik» három részre oszlik ú. m.:

1) die allgemeine Rechenkunst,
2) die Messkunst,
3) die Einleitung zur höheren Geometrie.

Ezen adatokat BIERMANN OTTÓ brünni professor úr szivességének köszönöm. (Kiadó észrevétele.)

mert a' maga helyén el van igazitva. Exemplarokat is fogok küldeni a' szerint a' mit irod, most tizet vagy tizenötöt data occasione (ezután, és nem most ezen levéllel eggyütt); a' gyanutól jó rendin meg-lehet, mert már itt is megszünt, minek utána szembe ditsérni és gyalázni is hiába probálták, 's mind a' két esetbe való indifferentiammal confundálodtak. — Jól teszed ha segitessz a' mit lehet az eladásba, mert még fele se költ-el. Az az Interessém is van benne; hogy engem a' hideg el-hágy 's megint eléveszen, a gyomorba van az oka, a' gyümöltsöket tsak szemmel kostolom, szöllöt se ettem; tavaszig félek egészen ki nem tisztulok, se muscularitor se elmémbe nem érzem gyengeségemet most, elmémbe egyszer sem is éreztem, egyébb aránt meg voltam gyengülve erössen; a' hasam van meg puffadva 's talán kisség a' lépem is; semmi orvosság nem fog úgy rajtam, mint a' tiszta izü régi bor: azért hozzád való fontos kérésem ez, hogy azon Exemplárok Contojára, küldj nékem egy vedresnyi általagba a' leg excellensebb tiszta régi bort, a melly savanyú tellyességgel ne legyen, mert attol rosszul leszek; egyébaránt tsak asztali legyen; szoktak seprő pálinkát tenni belé a' borba, azt absolute nem álhatom söt most az ó ürmöst se szeretem; ha két veder lesz se bánom; az általagot vissza küldhetem: itt absolute nem lehet kapni, vagy két helyről küldöttek egy-egy üveggel, de átalja az ember kérni — az árrát ird-meg, ha magadnak van úgy-is 's ha máshonnan kell venned 's nints más mód, úgy a' Napom pénze Contojára is küldj, itt el-igazitom, mert rutul meg irtoztam a hidegtöl, 's ha nem vigyázok, most a télen különben is gyönge alkotványom megromlik. Tellyesits minél elébb data occasione ....

barátod B. Fks.

19. Kelet nélkül.

Kedves Barátom

A' B. Wesselényi Istvánnétól küldött paquétot reményelem vetted.

Lengyel vissza küldötte a' Præmiumot vesztett Pièceket; sem pénz sem borostyán, semmivel vissza nem fizetve az elvesztegetett idö 's papiros — tsak ugyan javamra lehet, ha tovább nem tévelygek, 's nyereségem azon magában álló erösség (mellyet tsak ilyenkor lehet megtudni) mellyen a' szerentse idö változásai eltörnek — 's nyereség lesz az a' M. Országi Dráma is, a' melly némely jegyzésekkel a' megigazitás végett vissza-küldetvén a' Premiumhoz való reménységgel, egyedül nyert jusst tovább is repülni a koszorú után, minket (a kik mint incorrigibilisek vitettünk-le) parterre hagyva — mert annak tsak ugyan Poetának kell lenni, és Nemzetünknek vele egy ujj ékessége nyilt —

Meg vallom, erössen szeretném tudni, millyen az a' Drama; nem kételkedem annyi eszes ember itéletébe, de mégis szeretném magam szemével is látni, a' mit ök mutattak; kérlek ne késs engem tudositani erröl; írj mindent rolla a' mit tudsz; millyen tonusu, mik a' szépségei, mi benne a' Genialitás, 's a többi — hogy ha látom, hogy neki ollyan jussa van, a'mely az enyimet el-veszi, le mondjak arrol a mi másnak adatott 's az idegen sphærábol a' magam centrumához térjek — Ird meg azt is serio minden kártevö vétkes kiméllés nélkül, hogy engedjek-e tovább az Instinctusnak vagy elégessem a' mi bolondságot még tsináltam, 's hogy többet ne tsináljak, észre térjek.*

Tudositts a' Prænumeratioról ha tudsz valamit: én nem tudom azt is, hogy mint folyt: a' Báróné Zeyk Kriskával ketten nem tudhatom egészen tisztán, hogy mit tsina'ltak. Már schablos vagyok a' költségekre nézve. Itt eleget találgatták, de ámbár én is voltam Themába Zeyk Miklos, a' Báro 'sat. tsak ugyan senki se tudja bizonyosan, 's a' gyanu rollam jórendin elenyészett; én meg Zeyk Danielnek se mondottam volt, az Ötsém máig se tudja, 's reménylem ebböl a' circulusból, a' mellyet tsak a' magam continuatiojának ki terjedésének nézek ki nem mennyen — abba is akaratom ellen, rész szerint a' planum ki vitelére való kéntelenségböl terjedt ki. Az Exemplárok mind itt vannak: A' B. Elek dolga hogy áll tudom maga idejébe tudosítassz. Lili jó kedvvel van, a' Báróék szép kis Jutzijokba gyönyörködnek. Nekünk ketten nem sok örömünk van a' földön, a' reménység túl mutat ki egy szép prospectusra. Servus, Válaszodat késedelem nelkül küld Postán ha más alkalmatosság nem lesszen.

---

* Az 13—19. számú levelekben megemlített öt szomorújáték 1817-ben jelent meg Nagy-Szebenben. A munka czíme (Koncz az i. h. pag. 296 szerint) a következő: «Öt szomorújáték. Irta egy hazafi.» A darabok czímei pedig ezek:

I. Pausanias, vagy a nagyravágyás áldozatja, 5 felvonás.

II. Mohamed, vagy a ditsöség gyözedelme a szerelmen, 3 felv.

III. Kemény Simon, vagy a hazaszeretet áldozatja, 3 felv.

IV. A virtus gyözelme a szerelmen, 5 felv.

V. A szerelem győzelme a virtuson.

A pályázat a melyre Bolyai e darabjait beküldötte 1814-ben a kolozsvári nemzeti szinház reménylett megnyitása alkalmából 1000 rhfrt jutalomra kitüzött drámai pályakérdés volt. V. ö. erre nézve Koncz az i. h. pag. 293, Névy László «Otthon» szépirodalmi és ismeretterjesztő havi közlöny, 2. évfolyam (Budapest, 1875) pag. 174—181, 252—255, továbbá: Szilasi Mór, Egyetemes Philologiai Közlöny 1880, Szily Kálmán, Bolyai Farkas életrajzához M. É. XI, 9. sz., Brassai Sámuel, Emlékbeszéde, E. M. E. kiadványai, III. k. 3. f.; Bedőházy János: A két Bolyai, Maros-Vásárhely, 1898, Döbrentey Gábor, Erdélyi Muzeum 1814, I, 1818 IV. f. (első és utolsó füzet).

(Kiadó észrevétele.)

20. M. V. 1818 15 Januar.
Kedves Barátom

. . . .

Levélbeli Commissiodat el-igazitottam. Lili frissen van. Többet nem irhatok, az ez előtt ifjan el-vesztegetett idö miatt, idö-bánkrot vagyok örökké distrait semmire se érkezem; a' hideglelés után máj és lép puffadásom is lévén, a' fekete hypochondria sokszor inkább kínoz mint valaha, ha az elmult érzést tisztán lehet a' jelenvalóval egybe hasonlitani — nem sokára minden, el mult leszen — Mind addig (mert a' mennybe a' hol mind jók, nints barátság) vagyok

P. S. igaz barátod Bolyai Farkas.

Hiába ujjulnak az esztendök: reánk nézve avulnak: de az igaz barátság a' mint avul ugy javul, 's ez az élet kerek elpendése is mikor egésszen megavul, éppen akkor az utolsó estvén ujjúl-meg, egy soha nem avuló esztendövel, melynek napja az Isten, 's annak fényén a' minden világokbol egybe gyülö szentek tündökölnek. —

21. M. V. 1819. 14t Junii.
Kedves Barátom

. . . .

Nem panaszlok örömest, kivált Néked, mivel Te is a' hypochondriába bé-fogtál érni: noha a' meg türhető tsak a' többi bajom bé ne-érjen teged. A' feleségemet el-nyomta a' hysterika az a pokoli burján, melynek még leánykorába megesmerhettem volna a' tsiráját, ha a Cocytus partjai Botanicájába járatos lettem-volna — meg nött öszre horrende, kertésze jó volt (tudod ki a' Mater) aëre, földje, szegénység, fatumok — fellegest az én hypochondriám is szaporitotta, 's a' Jánoson való bu etc — essö elég volt, okosság napfénye majd semmi se, sötétségbe nö legjobban, ha dologtalanságban magára hagyják — elég a', hogy végre leverte a' feleségemet, heteket nem alszik, fogy, gyengül, iszonyu békételen, fél a' haláltól, fél éjszaka, mindjárt-mindjárt kiállja a halált, 's hagyakozik, iszonyuképen pusztitja magát és mindent maga körül — nem halálos de rosszabb a' halálnál 's tébolyodástól félti Szotyori; lehet Abzehrung is belölle — János harmad fél holnapja, hogy nem ir, noha sok leveleimre éppen valaszolnia kellene, 's Kemény Ferencz, azután Teleki Ferencz, most Petrasko mind tudtával jöttek-le, ha nem beteg — a' dolog jól nints; de a' feleségemnek nem mondom, ne hogy érje valami — Szomoru tsendesség a' Resignatio; de nints több megállása a szerentsétlennek — Már sok terhedhez még adok én is: . . . .

4° Lilitől irtam volt, hogy præenumeraltass, ha lehet, Lili tám Gyárfásnét is rá kérhetné : a' jövö héten egésszen ki-jö. 2 Rhf. bé-kötve. Pope Probatétele az Emberröl* egy más Poetakból való Toldalékkal Anglusból forditva mind, kivéve Schiller-nek Idealját, Freudeját, a' Glockét 's Resignatiót, de ennek a' végét megszelidülve — A' Schillerböl lévök versbe vannak ollyan félébe mint nálla — Már a' szükség adósság úgy el nyomott, hogy nem is dolgozhatom, 's mikor ez az álmodásom is meg kell hogy szünjék, akkor nints többé erőm köztetek maradni. — Servus addig! Vagyok örökké

igaz barátod B. Farkas.

P. S.

. . . .

Vajda szörnyü nehezen szenvedi a' Lili távollétét, még nem láttam az olta vidám kedvü : tsudálatos örömek, mellyeknek el-válhatatlan társak a' fájdalom, noha a fajdalmaknak-is oly' bájoló édességek van, hogy ezért amazt is megöleli az ember — töllünk Barátom ! el-mult az egyik, tsak a' másik (a' fajdalom) maradt karjaink közt.

. . . .

21. M. V. 3t 7bris 1819.

Kedves Barátom!

Hozzám való bizodalmad kedves volt nekem, de leveled tegnap elött este jött ; a mikor a Bárónénak édes Attyának küldött levelében meg-értettem, hogy Vajda bément, 's ma reggel azt is megtudtam Gyulaitól, hogy leányod kedden reggel mint mennyasszony a' templomba volt : valósággal szerettem volna azt az expeditiót, ha úgy eshetett volna ; de a' diligentiánk is 20a Augustii elkezdődött — Már száljon aldás rájok az égböl : adjon Isten örömet nekiek egymásba (kipótolva a' mit töllünk megtagadott) 's adjon nekünk is mint örömapáknak örömet! — nekem is Vajda fiam, 's mi egymásnak neveltünk — Nekem jó reménységem van : mindenik jó és eszes 's Vajda különösen ügyes ember . . . .

A' fiam küldött le két köttet rajzolatot : reménységim felett jók ; fejek, kezek, lábak, egész testek, de tsak contour, Ősszel igérte, hogy küld straffirozottakat 's granirozottakat is. — Szabó Téged fájnul talált, sokért nem adnám, már mikor a' nagy tábláról le-törlödöl, azon a' papiroson megmaradsz —

---

* Essay on Man. V. ö. pld. Névy László, «Otthon» szépirodalmi és ismeretterjesztő havi közlöny, 2. évfolyam (Budapest, 1875) pag. 174, 259 és köv., Koncz az i. h. pag. 297 szerint a munka czíme ez : «Pope próbatétele az emberröl. Anglusból fordítva. Más poetákból való toldalékkal. Maros Vásárhely 1818.» (Kiadó észrevétele.)

A' Popebe hever a pénzem, nem tudom distrahálni: per se nints pénz: még nem irtam, de talán irok Szentgyörgyinek, hogy publicaltassa újságba az V Sz. Jt, Parisi pert,* Popet; cum declaratione, hogy a' koldusok Capitaléjja tsak 520 frtra ment, mert az Exemplarok nem költek-el, 's alább szállittattak — kétszer abból is kiment Simon Napján 60 rf. a' koldusoknak reménység fejébe, és most altu tsak 400 a' Capitalis, 's ezt kellene nevelni a' mire lehetne. Hát addig ne küldenék-é hozzad nehányat?

Vagyok végig igaz barátod B. Fks.

22. Datum nélkül.

Kedves Barátom!

. . . .

. . . . . Második kérésem az, hogy Gudman ** úr, száz Popot vett volt által; elfogyott, Enyeden — 's más helyt is erösen keresik, azért Szent Marton napkor hozza vissza a' mit elnem adott, 's a' mi pénzt kapott azt is — a meg maradott exemplárokat addig is, ha lesz alkalmatosság küldje el — ha pedig ott el lehet adni, annál jobb — talán a Collegyomba Méhes eladhatná — nekem absolute pénz kell, mert probabiliter nagy útra kell indulnom 's kevés van most actu — a' fizetésemnek is három fertáj esztendőre való része benn van, nem is hiszem, hogy valahá rendbe kapjuk, nincs mód nem süllyedni adosságba, mert élni kell — Ugy is mi 200 ezüst forint!.

3dik kérésem mindnyájunk nevibe: hogy a' fizetésünk nevelésébe tsinálj valamit — 's ne késsél! — itt vannak legrosszabbul a' professorok — 's még eddig roszabbul voltunk — rosz bankóba négy száz magyar, a' mi hajdan ezüst volt — Udvarhelyt több a' fizetés... s az élet sokkal olcsóbb — Nints mód a' legtüzesebb léleknek is az élet nyomó gondjai alatt végre el nem alonni —

Vagyok végig

igaz barátod B. F.

---

* A *párisi per,* Érzékeny játék 5 felvonásban. Névtelenül jelent meg Maros-Vásárhelyen 1818-ban. Szinre sem a magyarországi, sem az erdélyi szinpadokon soha nem került.

** GUTTMANN, kolozsvári hires könyvkötő volt, kinek kötései ma is mesterségének becsületére válnak, valóságos remekbe mehetnek; de mint pályatársai Magyarországon a XIX. század elején általában, könyvkereskedéssel is foglalkozott, különösen *magyar* munkák eladásával. A könyvkötők voltak nálunk a magyar könyvkereskedés alapvetői. GUTTMANN, KAZINCZY FERENCZ szerint (Erdélyi levelek, 87—88. l.), német neve ellenére németül nem tudott, s a magyar irodalom terjesztésében buzgólkodott, míg a német művekről 1816-ban FILTSCH galanteriaárus gondoskodott. A BOLYAI bizományosa GUTTMANN volt.

23. M. V. 1821 d. Martii.

Kedves Barátom!

Rég nem vettem leveledet. A' Báróék, Vajdaék, szép ügyes kis unokáddal eggyütt jól vannak. Feleségem is a minap jobban volt, jól ett, tsendesen volt, 's természete ellen ollyan szelid volt mint a' legszelidebb léánka, valósággal nem igen látszott semmi ollyas rajta, tsak a' keményen meg dagadt hasa; szünetlen járt ki, mind ment volna, mindjárt, mindjárt elszökött, 's mind bujdosott egy helyröl másra, névnapokat köszönteni etc. — mintha egésszen más személy lett volna, nem ö, — de nem sokáig tartott, az akkori kijárásaival meghült, 's már rég hogy megint ollyan formán van mint az elött; fekszik, 's iszonyú nehéz természetü kényes, nincs nyugodalom se éjjel se nappal tölle — néha szeliden is van, 's ex tempore versificál folyvást, úgy hogy bámül az ember rajta — sokszor pokolba van, 's ott rí; a millen kegyes néha, látja a' Istent szinröl színre 's felségéseket mond, szintúgy a' másik extremumba azt mondja, hogy nints Isten, nints ember, nints lélek, úgy nézi az embereket mint a' madárt, kígyót, bogarat etc. Az Öreg per se mindenkor tsudálatos volt, most lehet képzelni millyen, 's rettenetes fösvény lett; semmit se ád a ház szükségeire, fát tselédet mindennapit mind én állom-ki, meg költsön se ád tiz forintot, 's mikor egy xrom sints, is más helyre kell mennem. — Elfáradtam keresztjeim alatt, félek meg-kell nyugodnom; nem vihetem tovább — el-is kezdettem a' sok nyugtalanság kedvetlenség miatt betegeskedni; bár tsak az életgond ne nyomna épen így . . . .

A tavasz jő, de a miénk többé vissza nem tér — jő nekünk is egy más.

A' fiamról jókat hallok. A' rajzolásba is jó most, belé jött; a' Musikába tsak egy van valamivel jobb, 's az is a Bétsi első hegedüstöl Meiselertől veszen per 5 rhf. órát, a fiamnak per se nincs módja órát venni, hanem az a' nállánál valamivel jobb vasárnapon ki-viszi magával Meiselerhez, 's még egy negyedikkel a' legszebb Quartetteket tsinàljak; ez neki költség nélkül jó gyakorlás. Tanulásra és talentomra nézve distingválják a' Generalis 's a több tisztek és Professorok, bizonyos datumokból tudom

A' Forst-Inspectorságról Szentgyörgyi azt irja, hogy meg a' dolog függöbe van, 's instantiamra válasz még nem jött. Valamit akarnék kiadni magyarul az egész Forstwesenröl,* a mi szükségesebb, és annak egyik ágába (a' Holzsparungra nézve) a' kemenczékröl is egy tractatust röviden képekkel, ép úgy hogy akárki meg tsinálhassa belölle. Az ez elötti kemenczcimböl két félét egy idegen Úr Bétsbe akar vitetni, most tsinálja a fazekas, — De az idén ujj és sokkal jobb kemenczéket gondoltam, 's tsináltattam. Sze-

---

* V. ö. Koncz az i. h. pag. 298. (Kiadó észrevétele.)

retném előre prænumeraltatni, hogy kár ne váljék, mint Popeba. Valljon lehetne-é per 3 Rhf. prænumeraltatni? . . . . . .

24. M. V. 1821 d. 15 Julii

«Feleségem szegény jobban lett volt, azaz fenn járt mindenfelé, jól ett, 's fajdalom nélkül volt, most tiz naptol fogva megint fekszik, nem nyugszik az egész ház, sem éjjel se nappal miatta, sír, ri, kiált, káromkodik — El vagyunk kénszeredve az álmatlanság miatt épen azaz erőm fogy el mellyel az fatum óriássával birkozik meg az ember — tudja Isten meddig birom még — — Vajdáék jól és frissen vannak derék unokáddal, a' kibe meg van fordítva *nec imbellis generant aquila columbas*, mert Neked imbelli columbanak aquila kölyked lett —

Szepesi itt járt, 3^{at} prédikállott 4 nap alatt én megszerettem azt az embert.

. . . . . Lengyel írja, hogy G. Kendeffi Adam ollyan jó vólna, hogy a' fiam számára méltoztatott a' Magyar Országi Arendájából 250 Rhfl. applacidálni; tudakozódott Lengyel, hogy hova kivánom hogy ezen pénzt assignálja. A Baroné kivánja az hogy Ö Ngshoz jöjjön a pénz . . . én Lengyelnek most mindjárt meg irom, hogy általad küldje az Ö Nga kezibe, most úgy is nem sokára pénzt kell hogy fel-küldjön János számára; ez a pénz különösen jókor jött, mikor éppen két órával azelőtt vettem levelét Jánosnak, melyben irja, hogy az ö Classisából mind rég lovagolnak, egyedül Ö nem 's erössen fatalis dolog, hogy nem lehet kitsinálni; még a télen megírta volt, hogy a Generalis maga fel-hivatta volt mikor meg a' sor ötet nem ütötte, 's azt mondotta, hogy nagyon szertné, ha a' szülei azon kis áldozatot meg tennék, 's az akkori lovaglói vacantiára ő menne — meg irta volt akkor, mennyi 1 esztendőre 'a kis áldozat, nints annyi a' mennyit G. Kendeffi applacidált, a minapi levelem után mellyet Lengyelnek ezen tárgyban irtam volt. — Nem tudom Gudmann az által adott száz Popeból kapott-e valamit, nekem még semmit sem adott. — Vagyok végig igaz barátod B. Farkas.

25. M. V. 1821 d. 3^t 7^{bris}

Kedves barátom!

. . . .

3^o Hogy G. Kendeffi Adam Úr Ö Nga 250 azaz kétszázötven Rhft. rendelt P. Lengyel úr által fiam számára, 's P. Lengyel tudakozta töllem, hogy hová küldje, melyre én azt feleltem, hogy ha ott vagy hozzád, hogy te a Bárónénak szolgáltasd kezébe, ha nem vagy ott pedig, irja meg a Baronénak Csombordra, hogy a' pénz már kezébe van 's a' Báróné Csombordról bé-küld érte; bizonyos datumbol gondolom hogy egyik sem esett még meg, söt azt se tudom vette-e Lengyel levelemet; neki is irok újjabban; s téged addig is arra kérlek, hogy beszélj vele, ha még ez a' pénz Csombordra nem ment, küld ide, ante 1. 8^{bris}, mert akkor indul ismét Petrasko Bétsbe; 's ez a lovaglásra való pénz, ö egyedül nem tanult még lovagolni, pedig a' Generalis maga mások elött ajánlotta volt neki még tavaly a vacantiát — Azt gondolom, hogy ezzel tsak a' Bárónénak azt a baját kiméllem meg, hogy ide még embert futtasson; 's még-is ha meg idö (elég) lesz inkább küld a' Baróné kezibe; ha pedig késnék a' dolog úgy küld ide; a többi félesztendei pénzt u. m. 638 Rhft. a Báró mar ide Petraskohoz el küldötte, úgy gondolván hogy 7^{bris} elein indul. A' Napom pénzére nézve megirom azt is, hogy B. Bornemisza Úr Ö Nga adott pénzt, 's a' mód, mellyel adott, nemes tsak az Anglus tud így adni, a' tavasszal maga ajánlotta (talán tölled tudva szükségemet, egyebet nem gondolhatok) akkor nem fogadtam-el, azon a' szokatlan jóságon való el-ragadtatásomba el-felejtettem a' szükségemet, ugyan tsak meg igértem, hogy a' mikor nagy szükségem lesz magam kérek; levelet írtam; 's a' leg kímélőbb levélbe bé-küldötte, meg választ se kért; természet szerint, hogy én küldöttem Contractust-is: van annak az Urnak pipere nélkül való karakteribe valami szép nemes; realis ritka ember — valamibe hasonló az Anglus kertekbe lévö kivül nem tzifra falusi házokhoz, mellyek belöl szépen ki vannak möblierozva.

Ez a' pénz várja tehát a' Nállad lévöknek Szász Peterhez való küldését.

Az én állapotom szörnyü, sokkal szörnyübb mint a mikor Kézsmártoni itt volt; a' nyáron megfurták temérdek nagy hasát, öt fertaj véres viz jött, több tsak azért nem, hogy nagy lépe a' lyuknak eleibe ment — fara hasa lába szörnyük, irtozás rea nézni, ketten emeljük; mejje tüdöje szabad, noha sokszor fullad, rendszerint hatalmasan beszéll, énekel: ugy tud mortificálni hogy nem hiheted, üt, ver, szid, horrende, átkoz engem, annyát — képtelen otsmanyul beszéll; az annya a minap elakarta hagyni, 's házat is fogadott, már úgy látszik azt gondolva, hogy nem sokáig viszi, noha még el-viheti, addig nem menyen-el; azutan osztán el-menyen bizonyosan, hogy éljen egészen tsendesen, fözetni se-akar, kosztot fog hozatni — a' végen per se ha él, semmivel fogunk maradni — talán egyik öröme ez a' rajtam 's a többin is (mert se feleségemet se a' többit nem szereti eggyiket is, az egy Pataki Jóskán kivül, a' kit most egy darabig még szenvedni láttatik, hogy egy kitsit tudott hizelkedni) való boszuállás, ha meg-eheti mindent — most is ottan-ottan meg támad, hogy miért kergettem ki a' házából; a' hol ma is 's holtig tisztességesen élt volna — meg vallom félek, hogy mindenit elveszteti a' míg vissza kerül. Hozzad most egy különös kérése van; tsak titokba tartsd: Mikor Kézsmarkiék el-mentek, küldött valamit annak az Öreg Sánta Nagy Józsefnének, a' ki a' Napom mellett volt, mikor Kolozsvárt feküt: én is küldöttem: most az izeni Neked 's kér hogy hivasd magadhoz — járatos Kezsmárkiékhoz —, 's adj nekie három Rhftot. 's kérd meg, hogy mit adott Kezsmárkiné neki, mikor innét haza ment; kételkedik a' Napom hogy meg nem vitte, 's különösen megkért, hogy okosan menj végire 's ird meg.

Feleségemnek nagy kivánsága volt Dómáldra kimenni, kivittem, 's visza is hoztam, nagy bajjal: ott sok szomorusággal elég édes óraink voltak: egy része a kertnek meg-hajolva fárad az áldás alatt, más helyt sürüségbe kigyozó utak patak, viz-esések kőröl kőre, mintha egy havasi erdöbe volna az ember — remete gunyhó egy viz-esésnél, köasztal; ott ebédeltünk hárman, a' János ki tett képivel, körül kereken a' Jánossal egyidejü nyirfák az égbe emelkedö fejeikkel — 's egy szép kis lyánka fürödött a vizesésnél mezitelen, kis még elnem tsalt Eva, 's mi az eset után még egyszer a paradicsomba.

(A copertán is olvass.)

26. M. V. 1821. d. 8. 7bris.

Kedves Barátom.

Tegnap inditottam hozzád a' Postán francozva egy levelemet; az abba irtakat nem iteralom; tsak ezt teszem hozzá 1° Hogy az edények és a' föld eladását ne várd-el, sem azért hogy a' Napom kívánságának eleget tenni siess, az edényeket, mellyek közt ugy tudom vasasak is vannak, el ne vesztegesd, quasi számadásod azok nélkül-is meg lehet, 's a' Quitántiat lehet azoktól megválva expediálni, úgy hogy azután azokról-is egy külön Quitántia menyen — meg azon is gondolkozom, hogy ha a' hordók vasasak jók, 's íz nélkül valók, 's tsak el-vesztegetve lehetne el-adni, inkább a' betsü árrán magam meg-tartanám, vagy magad tartsd meg ha még folytatod a' borral való kereskedést — én mihelyt modom lesz megint hozzá fogok, mert absolute fognom kell valamihez; mert közelebbről mostani állapotom egészen el-süllyeszt.

2° Szász Péternek ird-meg, hogy mig velem nem beszélt egy szót se szoljon az Öregnek.

. . . .

Az én keresztem Frater szörnyü; félek minden erőmet, tüzemet úgy elveszi, hogy a mikor kimenekszem, nem érek többé semmit is. Az Öreg minden utat el akar zárni arra-is hogy a nyomoruságomból némely részbe valamennyibe ki-menekedjem; azt mondá ma hogy ha a leánya meghal is, átok alatt meghagyja, hogy a' léánya gyöngyit 's ezüstét el ne adjam 's Jánosnak, mikor ember kort ér a kezibe adjam, sőt még a kezembe se adja, mert rég magához vette, hanem petsét alatt elteszi.

. . . .

Hogy Jósinak több penzt nem ád, nem tsuda: mert mihelyt magára menyen, mellyet meghatározott, az interessből meg nem él, 's bizonyosan a' Capitalishoz nyul.

Válaszodat elvárva vagyok végig

szerentsétlen barátod Bolyai.

P. S. A' mit iratott a Napom Postán küldött levelembe, Nagy Józsefnére nézve, talán Hidelvén lakik, egy öreg sánta Özvegy ki Napomhoz látott betegségibe, Kézsmarkiékhez járatos. Kérlek küld meg a' Kezsmarkinénak szolló levelemet; siető, de azt izeni Napom, hogy Nagy Józsefnéről absolute ne szolj Kezsmarkiéknak, hanem menj végire a' Postán irt dolognak 's válaszolj.

27. M. V. 1821 d. 13tiá 7bris.

Kedves Barátom.

Pataki Jósi mind . . . tássára nézve éretlenül, mind tanulására nezve nem eléggé fundamentoson, minekelőtte ügyesen ki-tanulta volna a' Kollégyomot, hogy solide épithessen, hirem és tanátsom nélkül bene male indul fel a' Goldbergiana fundatiora; * 's egyébb ressource nem lévén, a' Nagy Annyához jött: látván, hogy már nints egyébb mód, én is mellé állottam; 's így igazitottam a' mint leg-jobban tudtam az ő tzéljának minél jobban lehető el-érésére, a' többinek legkevesebb romlásával; mely-is abból áll: T. Pataki Mihály Ur kivánsága a' volt, hogy Napom adjon Jósinak ezer Rhftot 's maga a' Napomnak interest fizeti; ez per se lehetetlen volt különben, hanemha a' Bárótol vett volt fel az Öreg; a' pedig nem lehet, mert 1⁰ már a' Báró rég meg fizette előre az interest 2⁰ A' Napom rég készül még minekelőtte a' leánya meghalna el menni; akkor pedig bizonyosan elmenjen, ha az inertia miatt addig el-halad-is; akkor pedig mivel szállást fizet, nem főzet, 's mindent kész pénzen veszen, szükön éri-bé, ha az interes accurate

---

* A Goldberg-féle alapitvány 1896-ig a Bécsi egyetem orvosi karában tanuló erdélyi illetőségű hallgatók részére fenállott két, egyenként 315 frtos ösztöndij volt. Mária Terézia alatt létesült: legelsőként 1776-ban Gyarmathy Sámuel, az összehasonlitó finn-ugor nyélvtudomány későbbi európai hirű munkása nyerte el. 1896-ban Ő csász. és ap. királyi Felsége elhatározásával a kolozsvári egyetemhez tétetett át. (V. ö. A Kolozsvári tud. egyetem Almanachja az MCMI—II-ik tanév első felére, pag. 45.)

[Kiadó észrevétele.]

jö-is; hát még ha nem jő — én a' jó Pataki Mihály Ur jóságába nem kételkedem, de tudom valamennyibe házi bajait, 's bajos is illyen messze az irástudatlan Öreggel az administratio, de 3° A' mi a legnagyobb; ha egyszer meg-kezdődik a' Bárónál lévő Capitalis, osztán vége — ez certo certius certissimum — szegény szerentsétlen boldogtalan Öreg nem sokat gondol azzal, hogy maradjon a' gyermekeire — 's tulajdon magával sem tud gondolni — egybe áll mint a' kőfal, hogy a' gyöngyet és ezüst kalánokat megtartja, mindent inkább el-ád: nekem is meg hagyta átok alatt, hogy a' feleségem gyöngyit 's ezüstjit (az egész ezüst kitsi) el ne adjam soha, sőt meg mondta tisztán, hogy a' kezembe se adja, hanem maga, mikor le-jő János ember korába, kezébe adja, hogy lássa, hogy az az Annyáról maradt — Ollyan eggyügyü szegény, hogy meg nem szünik engem Téged átkozni, hogy a' boldogságából ki-kergettük, a' hol holtig tisztességesen élt volna — Denique mindenként forgatván a' dolgot, így határozódott . . . . hogy Te adj a' föld árrán és a' már által adott 50 Rhfton felyül, még adj 270 az az kétszáz hetven Rhftot; Ő pedig adott most a' Napomnak Contractust 350 azaz háromszázötven Rhftonról; és ez legyen két esztendőre való segittség; a' harmadik esztendőre osztan az akkori könyörül állások szerint a' lehetőségig ha élünk megint igyekezünk tsinálni valamit — akkor újra requirálja a' Nagy Annyát — A' Goldbergianum Stipendium 300, kell a' Kolosvári felvetés szerint 600, Pataki Mihály Úr igért volt a' Jósi szava szerint régebben 100^{at} (esztendőnkint per se), ha még 50^{t} kap más attya fiaitól in summa, tsak a' 3^{dik} esztendőre kell még 150, 's valami ollyas Urat tán kap, a' kivel le-jöjjön. Az Isten áldja meg ezen lépésit, hogy legyen legalább belőlle valami. . . . . Keresztem szörnyü — már alig birom, mind moraliter mind physice, mind bursaliter — rettenetes a' költségem — Az Isten őrizzen téged hasonló állapottól.

Vagyok végig szerentsétlen hiv barátod Bolyai Farkas.

28. M. V. 1821 d. 10. 8^{bris}.

Kedves barátom.

A' Szász Péter úr Copertája alatt az én levelem is meg jött: de a' szegény egyedül árván maradt Öregemnek,* a' kit úgy nézek mintha 9 sze-

---

* Bolyai első felesége Arkosi Benkö Zsuzsanna 1821 september hó 19. meghalt; v. ö. Koncz a. i. h. pag. 279. A kolozsvári ev. ref. egyház anyakönyve (pag. 31) szerint összeeskedtek: «1801 Sept. 28. Tekts. Bolyai Farkas úrat Borbély Benkő József haj: Leányával 'Su'sannával«. Ugyanott talált feljegyzés szerint keresztelték: «1802 December 21. Tkts. Bolyai Farkas Úrnak és Benkő 'Su'sanna Ifj'asszonynak Jánost. Keresztelő papja

rentsétlen gyermeke sírja felett árván állana, nem közönséges sebit kimélni szent kötelességnek tartván, lehetetlennek látom most még a' dolgot elé-is hozni; mert az felháborodás nélkül meg nem eshetik .... Leveledből nem látom hogy vetted volna a' Prof. Lengyelhez még a Josi ide jövetele előtt küldött neked szólló levelemet, mert némely pontjaira nem válaszolt — sem azt, hogy Prof. Lengyel az én rendelésemre vagy inkább barátságos kérésemre neked kezedbe adta a G. Kendeffi Adam úrtól a fiam lovaglása tanulására ajándékozni méltoztatott 250 Rhfrtot; melyről megírtam volt, hogy Petraskó Ur által okvetlen fel küldendő; 's most különösen jó volna annak a' szegény gyermeknek a' ki ott a' kő statuák közt egyedül sír, valami vigasztalására 's distractiójára. — Reiszeugja sincs, utolsó levelébe panaszolja, 's a miatt az Architecturát tsak plajbasszal kéntelen rajzolni. Ezen levelet Petraskó úr viszi, tsak néhány órát múlat ott: ha még a' pénz nállad van, Szentgyörgyi Urhoz adressirozva 's tsak annyit irva meg, hogy a tudva lévő 250 Rhft. mellyet G. Kendeffi Adám Úr Ö Nga János számára küld — jó és nagyon szükséges lesz Petrasko úrnak most kezébe adni. —

P. S. Gudmánnak 100 Popot adtam régen, 's még egy frt. se kaptam belőlle.

Én Barátom! nagy keresztemet, a' mikor minden, még az Anya maga is el-idegenedett, szelid békességes türessel vittem, valami mennyei gyönyörüséget éreztem benne, meg-alázodva állottam a' sebesitő atyai kéz alatt — minél nyomorultabb volt, annál inkább közelitettem hozzá, 's akármint szidott, sértett egészen a szivem közepéig, ütött, tépett, vert, el-faradhatlan szelidséggel türtem, 's tsak őtet sajnáltam. — Volt ollyan pillantat a' mikor ő ezt meg-ismerte illyen szókkal: «Kedves Ipomnak Bolyai Gáspárnak jó szivű fia! láttam én a' te könnyeidet mellyek érettem hullottak; azok az én legkedvesebb drága gyöngyeim, melyekkel az örökkévalóság hajnalába bemenjek.»

Számtalan sok szép érzései 's hosszasan egymásra ömlő szép beszédei — versei — szép Szent éneklései — 's nagy szenvedései, mikor eszembe jütnak; lelkemnek minden fajdalmas hurjai jajgatnak utánna — Alig hiheted, 's magam se hittem volna mint fáj nekem; az idő melly tőlle elválaszt rövidebb már mint sem maga gyógyitja sebemet ......

Szépen ki derülve 's tsendes bátor lélekkel ment a' halállal szembe, 's mint egy szent a' menykapujához érkezve ollyan örömmel mosolygott a' mellyet semmi földi nem hozhat elé — hosszú béke 's bútsúkézzel váltunk el, 's gyönyörűségesen beszélt—'s minden rándulás nélkül tsak verklärt lett.

Krizbai Dezső-Elek.» Ezen adatokat Nagytiszteletü Herepei Gergely ev. ref. pap úrnak köszönöm. (Kiadó észrevétele.)

Meg hagyása szerint Domáldra vittem, 's oda tettem a' hova ő ki mutatta volt, ott helybe szép beszédekkel — a' kertembe van egy magas hegy, 's annak közepén van egy szép hely — Ő bé húnta szemeit azon könnyek elől, mellyek az enyemiekre maradtak — Sok szenvedései után boldog már — meg vívta a maga harczát győzedelmesen 's meg koszoruzva nyugszik a' föld anyai karjai közt — maga is egy (szerentsés szerentsétlen) Anya (sok tekintetben) fiaért való önnön áldozat, kinek a' végzések a' maga gyermekét, mikor örömöt ér, meg ölelni nem engedték — 's egyszersmind gyermek is, 9 között legutolsó, a ki egy öreg árva Anyát hagyott — Hintsen minden tavasz virágokat az ő tsendes álmára ! én is adok reájok, az ég essőihez nehány cseppet míg élek — 's mikor a lassú szellő a' virágos pásítot lengeti felette, lelkem szabaduló szárnyai lebegnek az örökkévalósag felé hozzája fel.

Mikor itt a' nép egybe volt gyülve, akkor jutott eszembe, a' fia képét az övé alá szegeztem reszkető kezekkel ; az előtt mikor senki se volt, az annya behunt szemei elébe tartottam 's egybe tsokoltattam — most az Anya leánykori képére tettem, a szűz karján a fiu ; ez az én oltár képem mely előtt én sokszor könynyekkel áldozom.

Vagyok szerentsétlen barátod B. Farkas

29. M. V. 1823 d. 14 Apr.

Kedves Barátom !

A minapi levelemre válaszodat nem vettem : most újjabban két dologért alkalmatlankodom.

I. Az egyik a' Publikumot illeti, és annak egy részibe engemet is A' rossz papiros időkbeli nominalis fizetéset szolgalván négyen közzüllünk egészen ki azon nehéz időket, mi is már alkalmasint devalválodtunk ; azokba az időkbe még kevesebb volt fizetésünk nominalis szám szerint-is, 's azt is rend nélkül 's apránként kaptuk, 's a' sok restantiát a' devalvátiokor adták ki per se nominaliter ; nintsen-é ebbe a' szegénység megfundálva 's nem rakodnak-é réá a' consignatiok, a' midőn most-is fizetesünkkel lehetetlen bé-érnünk ; az élet gondja elöli a' lelket, az időt elveszi, 's a' Hazára tér a' mi kárunk — hogy világoljunk másoknak mutatni az utat a' sötétbe, ha nints honnét tölteni olajat ?

Ezeknek érzése és meg gondolása arra visz mindnyáján minket, hogy most a' midőn mind a' 3 Fő-Curatorunk benn van, 's a' Báró is ott van, kérjük hogy adják meg a' régi fizetésünket in valore vero ; a' Fő Consistoriumtól nem kérünk többet annál, hogy a' mit a' Juris Professornak 's rész szerint a' Philosophiæ és a' Naturalis Hist. Professoroknak igért volt, azt adja igaz ; mi osztán ki pótoljuk azt innét, 's fel-osztjuk. Kérlek tiszteld Professor Méhest, 's kérd meg Te is, 's az én nevembe is, hogy a' mit lehet tegyen meg mellettünk; 's tedd meg Te is; ha nem engednek is meg éppen annyit, neveljék legalább a' mennyivel lehet — Kérd meg a' Bárót is hogy szolljon Vasárhely mellett — Zeyk Urat nem szükség egyebekre nézve sem a' Kollegyom sem az Ispotály mellett adanimálni; de éppen ebbe a' materiába nem árt ha Te is szollassz és a' Báró is szoll — az egész Curatoratusnak irt instantiánkat G. Teleki M. Ő-Exciának adtuk — Tunyogit is kérd meg tiszteletünk mellett.

II. . . . .

Vajda Lili 's a' kölykök frissen vannak, Simon kis bika bornyú, a' Báró nevezte így, ügyes, még a' másik is lehet, de ez inkább hasonló hozzád — Jutzi veres himlős; azt mondja, hogy ha a' szeme nem hunyodnék, 's nem köhögne, 's még vagy két baja nem volna, egészen frissen volna — igen könnyen is van — a' legkönnyebben —

30. M. V. 1824 d. Jan.*

Kedves Barátom!

Leveledet, melybe mind a' Gróf úr ő Ngának írt levelemre, tenni méltóztatott válasszát közlöd, mind pedig boraid iránt való tudositásomat sürgeted, barátságosan vettem.

Azon ritka szép lélek jóságát, mely a' hellyet, hogy annyi esztendőken által el-fáradt volna, még a' végin egy el-fáradt felebarátját le-görbitő terhet veszen le annak válláról, méltó képpen meg tudván betsülni, azt holtig háládatos szivvel fogadom el: Szentgyörgy Napja táján, a' mikor ő Nga. parantsolni méltóztatik, ugy igazitjuk a' mint legjobb lessz, hogy ő Nga. se tegyen igen nagy áldozatot, 's én-is áldozattételemmel (a' midőn azon kedves hellyemtől meg-válom), azt a' tzélt a' mellyért réa határoztam magamat el-érjem.

A' mi a' borra nézve való kérdésedet illeti, arra válaszom ez: . . . .

A Grófné Ő Nga. kezeit alázatosan tsokolom és vagyok

igaz barátod Bolyai Farkas

P. S. A' karátsoni vacation ki nem mehettem. Ha irsz a' Bonyhai számtartónak, hogy hozzám jöjjön vagy bé küldjen. Acidum Sulfurisért, én küldök, 's levelet irok mellett.

P. S.

Bodort barátságosan köszöntöm, 's ohajtom látni — ha adhatunk még sírunk előtt egy sorvadó jobb kezet — A' Fiam Temesvárról irja a' Mathesissel teli vastag leveleket.

---

* E levél a mint a P. S.-ból kitünik, nem Bodorhoz van intézve; nem sikerült a' czimzett nevét kikutatni. (Kiadó észrevétele.)

31. M. V. 28 Maji 1824.

Kedves Barátom!

Küldjük valahára a' kollégyom finantzialis állása le-irását: késöre ugyan, de egy átaljába az ember utóljára haggya a' válót — 's most talán különösebben is betegsége az idönek azt a' mindenünnen fáradságosan réá felhánt Schlendrianok halma alá mind méjjebben temetni — elménknek minden kis világosságával a' setétségnek szolgálunk — Denique minél méjjebben van az arany annál betsesebb; 's tsak a' kedvesebb fel-támadás játekáért temetjük ollyan méjjen el.

Levelem tzélja kettő: 1° hogy szoljak vagy egyszer még hozzád minekelőtte örökre el-hallgatnék — 's Te is kezdenéd el egyedül az örökkévaloság angyala trombitájára figyelmezni hajdani musikalis .... füleiddel.

2° Ugy volt, hogy Prof. Antal és én eggyütt menjünk-be, fizetésünk nevelése kérésére, de contra mandaltatott: kérlek tégy a' mit tehetsz, 's tenni a' Hazára 's emberiségre, és az Isten Országa közelittetésére szüksegesnek jónak látsz — a' fattyu cultura ugyan rosszabb annál, ha az ember állatnak maradott volna a' makk mellett — az igaz kimivelödés az Isten tzéljára való haladás — 's a' mostani állásba pedig különösen nekünk a' midőn egyebet nem tehetünk, az egyedül való erősség, melybe vonhatjuk magunkat, a' jövendő reménységére nevekedő ifjuságnak nevelése tanitása: mennyire szükséges erre a' tanitóknak az élet gondjától a' mennyire lehet szabad el nem nyomatott és le nem alatsonittatott lélekkel lenni, ezt tsak annak kell magyarázni, a' ki a' Minerva templomának tsak pitvarán járt.

Én pro mea domo már keveset szollok: nehány napokkal ez elött húsz esztendeje (1/5-öd század) hogy itt nyomorgok, a' legrosszabb bántó időken által haldokolva — akkor mind négyszáz magyar forint volt a' fizetés in valore nominali, tehát semmi, 's azt se adták meg a' devalvatioig. — már akármit szinte hiába adnak, mint az éhen holtak temetöjébe ha egy tzifra asztalt terítenének — félek a' Getse circiter 70 esztendö felé használandó félmilliójával is így járunk* — nekem már mindenhez el-veszett a' kedvem,

---

* Gecse Dániel, maros-vásárhelyi jeles orvos a collegium százados emlékünnepének hatása alatt 2000 rajnai forintot tett le 1820-ban a collegium pénztárába, ehhez 1824-ben végrendeletileg 6000 forintot hagyományozott «*emberszereteti intézetének*» első alapjául. S ez összeghez anyja halála után összes többi vagyona is volt járulandó. Meghalt 1824 május 23-ikán. Az intézet alaptőkéje 1828-ban már 10,233 forintra növekedett; az anyjának kamatozó tőke pedig 22,243 forint volt, mely 1832-ben szintén az intézet alapjához járult. Végrendeleti intézkedése szerint a tőke kamatozása 1820-tól kezdődött s 1920 végével *egy millió* forintra fog nőni, akkor a tőke szaporitása megszüntetendő s a kamatok a kijelölt czélokra forditandók; a tőke maga pedig két egyenlő részre osztandó, egyik rész a

fajdalommal nézek vissza a' mostoha könyörülállások közt elveszett 1/5 századra — 's el-tsüggedve mozdulok-meg, mint összel mikor alatt a' nap, kurta a' nappal, hideg, eső, szél, sár van.

De a' haza java kivánja, hogy a' Tanitók jobban fizetödjenek: 200 ezüst rhft. nehány esztendöktol fogva a' fizetesünk ; 's ezt sem adták soha, 's fé lek soha se is adják accurate, söt ollyan kevéssé bizhatik az ember a' Collegyomhoz, hogy calculusba se meri tenni — fánk nints perse; akár ki vesse fel, hogy lehet azzal házat tartani — a' városiak tudják a' Professor állapotját, 's . . . . Professornak igen kitsi betsületet adnak — az egész Országba Professor nints ollyan szigoruan, mint a Vasárhellyi ; Udvarhelyt fa 's egyébb oltsó, a' fizetés több 's accurate jár.

Kérlek, beszélj Tunyogi Urral-is ; 's tegyetek a' mit lehet arra, hogy neveljék a' mennyire lehet fizetésünket, 's kapnók accurate. Valósággal még a' bánko esztendöken által nyomorgók és ruináltak — is valami pótlást érdemelnének — Söt minthogy nekünk promotionk nints, minden tíz esztendövel nevelni kellene fizetésünket — De már mint az Örmény igen sokat kérek — el-hallgatok.

Vagyok örökké barátod Bolyai Farkas.

P. S. Prof. Méhes Urat barátságosan tisztelem ; reménylem szóll melletünk — Ha találkozol Zeyk Urral, capacitáld, hogy 200 ezüst forinttal nem lehet Professornak házat tartani, hogy a' tudománynak szentelje magát — oltsó húsnak híg a' leve.

32. M. V. 1825. 22. febr.

Kedves Barátom !

Két leveledre illyen késön válaszlok, 's most is sok bajam miatt igen röviden : ez nem volt eddig, ez elött Te szoktál volt adósom lenni — ezekbe az idökbe levö környül állásaim mentsenek meg — Ugyantsak a' mi tsinálandó volt leveleidbe, késedelem nélkül el-jártam benne

1° Orbán Miklósnak azonnal hirré adtam

2° Enyedre irtam mindjárt akkor az Eccla Capitálisára nézve, 's vettem is a' Barónénak oly válasszát, hogy egésszen Réád van bizva — már tsak

---

reformátusok egyházi főtanácsának kezelése alá megy, mely annak kamataiból egyenlően osztozik a marosvásárhelyi főiskolával ; a másik rész kezelését a magyar kormány veszi át, mely a kamatok felét Maros-Vásárhely városának adja, felét pedig jótékony és közhasznú czélokra fordítja. Az egész alapítvány, mely 1870-ben 78,072 forint 62 krra rúgott, állandóan Maros-Vásárhelyen kezelendő, hogy az abból nyerendő kölcsönökkel e város és vidéke népén legyen segitve. BOLYAI erre az alapítványra czéloz.

arra kérlek, hogyketté szakasztva küld minél elöbb kezembe ; most Procurator Szathmári József levélbe zárva el-hozná.

3° Fizetésünk neveléséröl való gondoskodásodat is azonnal közlöttem Collegaimmal : igen szivesen köszönték — még látom semmi sints belölle — fatalis dolog, hogy az interest nem adják.

4° Pope iránt is irtam Vajdának; hogy ha ö tudna valamit; mert én többet nem tudok, azon 7 huszasnál mellyet ugy tetszik tavaly küldöttél. — Régen homályosan emlékezem sok esztendökkel ezelött talán az V szomorú játék vagy Parisi Per arrába küldöttél még nehány (nem tudom mennyi) forintot.

Minthogy Enyeden jártál nints miért irjak semmit arról, hogy ez az esztendö úgy látszik mintha a' megholt testvéreiröl réa maradott adóságait le akarná fizetni a midön feleségemet,* fiamat vissza adva — Repente liberalis stultis gratus est — mikor a' meg ismert ellenség mosolyog, rettenetesebb mint a' mikor menydörög — nekem pedig a fatum ellenségem — 's azt hiszem tsak azért emelt fel, hogy mint a' sas a' tekenös békát különben nem tudván eltörni, a' magasságból vessen le. Ennyi már meg van, hogy a feleségem beteges volt, és ugy látszik az is lesz, ritkán van jó napja — a fiam pedig 11. martii indul el, hihetöleg örokre — egy quasi halál — Kolosvárra mind az idö rövidsége mind a pénz nem léte miatt, akarmint sajnáljuk-is, én-is ö-is, el nem mehet — Nagy kemény természetü szép ifju, a katonai bátorság az ártatlanság szemérmességével be pelgyedet — se nem kártyázik se bort pálinkát se kávét nem iszik, se nem pipázik, se nem tubákol, még nem beretválkozik, tsak péhés — rendkivül való mathematicus, igaz genie, excellens hegedüs — minden hivatalok közt leginkább szereti a katonaságot; csak az Otiumot szeretne inkább, melybe dolgozhatnék, már is sokat dolgozott a hivatal mellett is. Tisztel tégedet.

Többet nem irhatok. Sok a' baj, nehéz élni kitsi fizetésböl — 's a' méjjen le-esettnek újra lábra allani. Vagyok végig

igaz barátod Bolyai Farkas.

A' fiam tisztel.

33. M. V. 1825. 24. Apr.

Kedves Barátom!

A fiammal hála Istennek megint jól vagyunk : irt már Temesvárról kétszer is — mely irásaiból azt is örömmel látom, hogy Erdélyre hazai érzéssel tekint vissza — most az ifju szivbe mint egy üres ujj templomba a bál-

---

* Bolyai 1824 decz. 31 másodszor megnösült v. ö. KONCZ az i. h. 279 l. (Kiadó észrevétele.)

ványok is könnyen kapnak hellyet, jobb volt a Hazának tétetni bé, mely majd mikor egyebekkel lett volna teli, bé nem fért volna többé — Mond meg kérlek data occasione G. Kemény Miklós úrnak mind ezt, mind azt, hogy Temesvárról is engedelmet instál (sajnálva) hogy az idö rövidsége és Ö Ngának Kolosvárt léte miatt nem udvarolhatott. — Ö Nga Szathmári Jósitól izente hogy haragszik, hogy meg nem mutattam a fiamat: köszönöm, hogy látni kivánta, és apai örömömbe részt venni, melyhez mint igazi Patronussának nagyon mélto jussa is van különösen is, 's magam is sajnálom erössen; a' haragra éppen méltatlan vagyok; 's tudván is hogy jobb Ö Nga, mint sem haragudjék; tsak a fenn irtnak sajnállást teheti az a' szó, 's azon sok szép magvetésnek el-maradását mellyett Ö Nga az ifju szivbe tehetett volna

Az a kérésem is van hozzád, hogy tudván a' kolozsvári törvényt, tudosits minél hamarább engem arról, hogy a fiamnak én 1° mivel tartozom azokkal (?) a' mellyeket az Annyával adtanak halálakor, meg maradott részeből. 2° Tudod az Ipomnak Mutua fassiója van a' Napommal: de jure egészen a fiamé lesz-é a' Napom halála'kor az Annyát illető rész? én azt gondolom ugyan, hogy a Mutua fassio quasi testamentum, 's tehát, mivel én benne bizonyosan meg nem emlitettem, a' fiamat kell illetni.

3° Valami adoságom van B K. S. úrnál mint Creditornál, ollyan mellyet a' János Annyával tsinaltunk: ennek felit neki kell hordozni, annyival inkább, hogy irásom van régi datumról a' N. feleségemtől, hogy minden adósságokat együtt tsináltunk.

Szeretném tisztán tudni, hogy irnám meg neki, 's lennék tisztába mindenre nézve, ez is erösitene a' békességet; azért kérlek, ne halaszd válaszodat.

A Napommal sok bajom van: annak ide hozzása nagy fatum volt réam nézve — mihelyt nints pénze, minden átkot ont réám, reád-is per se, hogy ki-üzted a' házából bujdosóvá tetted; azt mondja, hogy a' házába maradt volna 's tisztességesen élt volna; azt mondja, hogy ollyan conditio alatt adta volna el, hogy lakjék benne holtig, 's adják az interest — ez perse most született gondolat, mely nem realizálódott volna — akarmit hiába mondok, már nem is disputálom, hanem indulok pénzt szerezni — nagy baj ez.

Kezsmárki is szünetlen kényszerít erőszakosan, hogy adjak szerezzek 100 rhftot. neki: hiába irom hogy lehetetlen, soha se igértem söt minden kénszeritésére is meg irtam, hogy meg ne haragudjék ha nem kapok — most egy ide való Urtól felvett 100 rhftot azt mondva neki, hogy én itt meg adom, én vissza irtam, hogy absolute nem tehetem —

Te ne tudd éppen így, de data occasione értesd meg vele, *hogy napom, fiam itt járása, hazasságom miatt nagy pénz-embarrasba vagyok — Jánosnak 200 rhftot adtam — meg egyebeket is.*

A' feleségem takarékos okos jó erkölcsü szép asszony, de nagyon gyenge beteges — 's az élet gondja erössen nyom; tsak az Isten örizzen gyermektöl! Nil est ab omni parte beatum.

A' fizetésünk dolgába igyekezz tenni a' mit lehet; vacuus venter (curis pleno capite) non studet libenter.

M. Zeyk urat aláson tisztelem és mond meg hogy Jósi excellens fiu, külomb lessz az apjánál; 's mond meg hogy az én Vulcan fiam is megszelidült, kétszer is irt Temesvárról. Bolyai Farkas.

A Mathematikai és Physikai Társulat kilenczedik rendes közgyűlése.

A f. évi márczius hó 6-án tartott választmányi ülés alapszabályaink 24. §-a értelmében a IX. rendes közgyűlés napját április hó 10-ikében állapította meg s határozatilag kimondotta, hogy a közgyűlést ezentúl is az április 11-iki nemzeti ünnep napján fogja megtartani. Egyszersmind kivánatosnak tartotta, hogy ez idén e gyűlés egyszerűen a rendes előadó üléssel kapcsoltassék.

A márczius hó elején szétküldött meghivóra hetvennél több tag és vendég jelent meg, kiknek névsora a körözött ív szerint a következő:

Ábrahám István, Andor Tivadar, Balog Mór, Bauer Mihály, Beke Manó, Bogyó Samu, Dietz Lajos, br. Eötvös Loránd, Feichtinger Győző, Fejér Lipót, Fényes Dezső (Arad), Fraunhoffer Lajos, Fröhlich Izidor, Galló Paula, Glücklich Vilma, Goldziher Károly, Gruber Nándor, Hajnal Márton, Hatvani Ede, Hausbrunner Vilmos, Hubatsek Alajos, Juckel Gyula, Kalecsinszky Sándor, Kármán Ferencz, Kiss Károly, Klupathy Jenő, Kopp Lajos, Koschowitz Gyula, Kövesligethy Radó, Kronich Lénárd, Kürschák József, Lakits Ferencz, Lövinger Rezső, Mikola Sándor, Oberle Károly, Pallagi Gyula (Kisujszállás), Pilcz Ottó, Rados Gusztáv, Rados Ignácz, Raffmann Jákó, Rátz László, Réthy Mór, Róna Zsigmond, Rucsinszki Lajos, Schmidt Ágoston, Schuller Alajos, Spiegl I. Zsigmond, Steiner Lajos, Strauss Ármin, Szabó József (Vácz), Szabó Péter, Szekeres Kálmán, Széky István (Gyöngyös), Szerényi Géza, Szőke Béla, Tangl Károly, Tőtössy Béla, Visnya Aladár, Wittmann Ferencz, Zemplén Győző. Mint vendégek: Kármán Tivadar, Molnár Etelka, özv. Kovács Arpádné s többen.

A közgyűlés napirendje:

1. Elnöki megnyitó.
2. Titkári jelentés.
3. Pénztárnok jelentése és költségelőirányzat 1902-re.
4. Pénztárvizsgáló-bizottság jelentése.
5. Választmányi tagok választása.
6. Indítványok.

A KÖZGYŰLÉS.

1. Elnöki megnyitó.

A közgyűlést Schmidt Ágoston alelnök nyitotta meg rövid beszéddel, melyben a Társulat szép számban megjelent tagjait szivélyesen üdvözölte. A múlt évi közgyűlés jegyzőkönyvének hitelesítése után a jegyzőkönyv hitelesítésére Pallagi Gyula és Széky István tagtárs urakat kéri fel.

2. Titkári jelentés Kövesligethy Radótól.

Tisztelt Közgyűlés!

Tíz tekintélyes kötet tanubizonyságot tesz, hogy Lapunk már megindításától fogva csak keveset foglalkozott Társulatunk hivatalos beléletével. A kik megalapították, nagyon helyesen úgy gondolhatták, hogy tudományos egyesületet az a folyóirat támogathatja legjobban, mely minden rendelkezésére lévő sorát a tudomány mívelésének szenteli. Vétenék e hagyomány ellen, ha hosszabban beszélnék arról, hogy a Mathematikai és Physikai Társulat és vele folyóirata életének tizenegyedik évébe lépett s hogy majdnem tizenhét év telt el, hogy czélját élőszóval, előadásokkal szolgálta. Tíz vagy tizenhét év utóvégre nem hosszú idő társulatok életében, de büszkeséggel és hálával tölthet el, hogy hazánk első tudományos intézete úgyszólván az első percztől fogva anyagilag, tehát erkölcsileg is támogatta. De ha nem is pillantunk vissza hosszú múltra, bizony jelentős idő a tíz vagy tizenhét év a férfi életében. Említsük tehát jubileumunk évében a gondviselés iránt hálával és örömmel, hogy a Társulatnak megalakítói és hosszú éveken át előkészítői most is leghatalmasabb támogatói, a kiknek sorából csak egyetlen egy név, az igaz, hogy a legjelentősebbek egyike, tünt el.

A tizedik társulati évben, mint átlag minden évben 9 rendes, kivétel nélkül szorgalmasan látogatott ülést tartottunk. Ezeken 8 előadó 9 mathematikai, 5 előadó 7 physikai tárgyról értekezett. Buzgó hallgatóság és a megkívánható arányban új nevek megjelenése mindenesetre a társulati tevékenység kedvező birálatául fogható fel; de nem szabad elhallgatnom, hogy a tagokat nem pusztán elismerés, hanem kedves jóindulatuk is hozza ide, a mely megérdemelné, hogy kissé több kisérleti előadás tartásával lankadni ne engedjük.

A Mathematikai és Physikai Lapok X. kötete $25^1/_4$ ívnyi terjedelemben szabályosan megjelent. Benne apróbb czikkeken kívül 12 szerző ír 17 mathematikai, 8 szerző 10 physikai tárgyról. Minthogy a lap terjedelme a két tudomány között egyenletesen oszlik meg, látni való, hogy a physikai tárgyú czikkek a szokottnál kissé hosszabbak. Némileg mintha távoztunk is volna az eredetileg tervbe vett iránytól: az eredeti dolgozatokkal szemben mindjobban háttérbe szorúl az ismertetés. Ez kétségen kívül örvendetes dolog, de vidéki tagtársaink érdekében az ismertetésekről teljesen lemondanunk nem szabad. Igaz, hogy Lapunknak anyagi viszonyaink által szigoruan előírt csekély terjedelme is akadály.

Nehány évvel ezelőtt a Természettudományi Társulat, mely minden tekintetben mintául szolgálhat és nekünk szolgált is, egyik közgyűlésén elhatározta, hogy minden választmányi tag évenkint legalább egy czikket irjon. A mi szerényebb viszonyaink között Társulatunk virulni fog, ha minden választmányi tag megbizatásának három éve alatt két előadás tartására kötelezné magát.

Választmányi üléseinknek tárgya most is társulati évünk főbb eseményeire, a tanulóversenyre, a közgyűlésre és a tagválasztásokra szorítkozott. A közgyűlésre vonatkozó határozata némileg alapszabályaink 24. §-ának bővebb értelmezése A közgyűlés ugyanis húsvét táján lévén tartandó, mint állandó határnap önként kínálkozott április 11-ike, mely egyszersmind a húsvét lehetséges határainak közepe. A választmány ezzel egy már a VI. rendes közgyűlés alkalmával felmerült eszmét emelt határozatra. Egy másik, jogosultságát az eddigi tapasztalatból merítő határozat értelmében csak a tisztújító közgyűlés, tehát minden harmadik közgyűlés lesz hosszabb előkészületeket igénylő előadó ülésekkel ünneplendő; a közbeesők inkább hivatalos része a rendes üléssel kapcsolható. Mindez természetesen nem zárja ki, hogy a közgyűlésre felránduló vidéki tagtársaink az intézetek megtekintésével kárpótlást nyerjenek.

A VIII. mathematikai tanulóversenyt 1902 október hó 12-én tartottuk meg. Hivatkozással a múlt évi novemberi füzetünkre itt összefoglalólag csak annyi ismétlendő, hogy összesen 72 versenyző tanuló közül Póka Gyula Losonczról az I., Baranyó Ernő Szolnokról a II. br. Eötvös-díjat nyerte el. Megelégedéssel utalhatunk azonban arra, hogy nem csupán a versenyzők száma nagyobb, hanem az eredmény is tetemesen jobb, mint az elmúlt évben volt.

Mint minden évben, úgy ezúttal is tudatta a Társulat e verseny eredményét a vallás- és közoktatásügyi miniszter úr Ő Nagyméltóságával. Felterjesztésében felhasználta egyszersmind a kedvező alkalmat és hivatkozva a Társulat tíz éves fennállására, szorgalmazta a már régebben benyújtott segélykérő emlékiratának kedvező elintézését. De míg a miniszter úr 1901 deczember 16-ikán 88,252. sz. a. kelt leiratában a tanulóverseny eredményét örömmel tudomásúl veszi, egyben legnagyobb sajnálatára tudatja, hogy a segélyezés felvétele a költségvetésbe nem sikerült. Noha ezen elintézés kétségtelenül sújtja Társulatunkat, a minek első jele, hogy a szerkesztők szigorúan kénytelenek betartani a Lap most folyó kötetében a köteles minimumterjedelmet, mégsem kétségbeejtő, mert hangja reményt nyújt, hogy ismételt kéréssel tán czélt érhetünk.

Társulatunknak jelenleg 433 tagja van, 24-gyel több, mint az előző évben. Minthogy e szám éveken át makacsúl 410 körül staczionált, az emelkedés — reménylem — sokat mond. A tagok közül van 16 alapító és 417 rendes tag, a kik közül Budapestre 199, a vidékre 218 tag jut. Hölgytagjaink száma 7. Az előfizetők száma is 4-gyel emelkedett és jelenleg 67-et tesz ki.

A Magyar Tudományos Akadémia és Mathematikai és Természettudományi Bizottsága most is kegyes volt Társulatunkat összesen 2000 koronányi segélyezésben részesíteni. Midőn ez áldozatkészségért az egész közgyűlés nevében is hálás köszönetünket fejezem ki, kérjük, hogy hathatós támogatását a jövőben is engedje reménylenünk.

Létszámunknak remélhetőleg most megindúlt emelkedése nem tölthet el akkora örömmel, hogy miatta elfeledhetnők veszteségeinket. Tagtársaink közül elhúnytak Dischka Győző, Fail Attila, Grexa Loránd, Németh Antal, Perger József, Soós Mihály, Vidovits Bonaventura, és legújabban Abt Antal, a kik közül nem egy szorosabban is tartozott hozzánk. A Társulat hálásan és kegyelettel meg fogja tartani emléküket.

Nem vagyunk gazdag Társulat, a mint az igen tisztelt pénztárnok úr jelentése azonnal ki fogja mutatni, de vannak nekünk is kincseink, melyekért a titkárság legőszintébb köszönetét mondja: igen tisztelt tagjaink munkakedve, szeretetreméltó támogatása és ragaszkodása, melyekért a jövőben is esedezünk.

Kérem az igen tisztelt Közgyűlést, hogy jelentésemet tudomásúl venni szíveskedjék.

Budapest, 1902 április hó 10-ikén.

3—4. Pénztárnok jelentése és költségelőirányzat 1902-re és pénztárvizsgáló-bizottság jelentése.

Tisztelt Közgyűlés!

A múlt évi zárszámadás előterjesztését azon örvendetes kijelentéssel kezdhetem, hogy a költségelőirányzatban 1701 kor. 89 fillérben megállapított hiány 129 kor. 67 fillérre vagyis 1572 kor. 22 fillérrel alászállott.

E kedvező körülmény abban leli magyarázatát, hogy a költségvetés nagy aggodalommal volt összeállítva, a mennyiben a múltak tapasztalatai alapján tagdíjak czímén kisebb összeget reméltünk elérni, mint a mennyi tényleg befolyt. De kedvezőbb eredményt értünk a költségvetés egyéb tételeinél is, úgy a bevételeknél, mint a kiadásoknál is.

A t. Közgyűlés kegyes engedelmével talán mellőzhetem a kinyomtatott és kiosztott zárszámadás tételenkint való fölolvasását, s így azonnal áttérhetek a részletekre.

Eltekintve a Magyar Tudományos Akadémia 2000 koronás segélyétől, mely az előirányzattal megegyezik, bevételünk a folyó évi tagdíjaknál 100 kor.-val, a hátralékoknál 406 kor.-val, a kamatoknál 33 kor. 25 fillérrel, az előfizetési díjaknál 80 kor.-val, a vegyes és átfutó bevételeknél 92 kor. 4 fillérrel nagyobb, mint az előirányzat. Ezen 92 kor. 4 fillér részint tévedésből hozzánk került idegen pénzekből, részint régebbi füzetek eladásából származik, ezeket, valamint a kiadási oldalon előforduló vegyes kiadásokat előre látnunk nem lehet s azért az előirányzatban nem is szerepelnek.

A felsorolt különbségeket összeadva 711 kor. 29 fillért kapunk, azonban ebből levonandó az előirányzott, de be nem folyt hirdetési díj 100 kor.-ja, s így a tényleges bevétel 611 kor. 29 fillérrel kedvezőbb az előirányzatnál.

A kiadásoknál a nyomdai költségekre 5797 kor. 26 fillér volt fölvéve, 3458 kor. 39 fillért kifizettünk, azaz 2338 kor. 87 fillérrel kevesebbet, ebből azonban leszámítandó azon 2054 kor. 99 fillér, a melylyel a Franklin Társulatnak tartozunk, a megtakarítás tehát 283 kor. 88 fillér. Az irói tiszteletdíjaknál 152 kor. 68 fillér, az expediczíónál 135 kor. 94 fillér, a mathematikai tanulóversenynél 2 kor., összesen 574 kor. 50 fillér. Minthogy azonban az irodai költségeknél 7 kor. 67 fillér, a vegyes kiadásoknál 85 kor. 90 fillér túlkiadásunk volt, ennélfogva ezek összege 93 kor. 57 fillér, az előbb említett 574 kor. 50 fillérből levonandó s így az előirányzattal szemben 480 kor. 93 fillér megtakarítás mutatkozik.

Hogy anyagi helyzetünket helyesen itélhessük meg, tekintetbe kell vennünk még követeléseinket is, mint tekintetbe vettük tartozásainkat.

A vagyonmérleg baloldalán az utolsó előtti sorban olvasható, hogy tagdíjhátralékokban még 300 kor. követelésünk van. A tagdíjhátralékok összege tulajdonképen nem 300 kor. s a múlt évben sem volt 600 kor., valamint a folyó évi tagdíjak czímén sem 2000 vagy 2100 kor.-ra lehetne jogosan számítanunk, hanem jóval nagyobb összegre, de a költségvetés és a mérlegbe a teljes összegnek fölvételét nem ajánlhatom, mivel a tapasztalás azt bizonyította, hogy a követelés teljes összege tényleg be nem folyik, s hogy mennyire lehet biztosan számítani, arra kellő statisztikai adatokkal még nem rendelkezünk. Nem tehetünk tehát egyebet, minthogy e czímen annyit veszünk föl az előirányzatba, a mennyi az előző évben tényleg befolyt, a tagdíjhátralékból pedig annyit, a mennyi a közgyűlésig befizettetett. Tagdíjhátralékokból mostanig körülbelül 300 korona folyt be, azért ennyit gondoltam a mérlegbe fölvenni.

Még egy követelésünk van. Calderoni és társa a Mathematikai és Physikai lapokban hirdetéseket tesz közzé, melyekért még 1900-ról 100 koronával, 1901-ről pedig 80 koronával tartozik. E 180 korona kiegyenlítése némely kisebb differencziák miatt halasztatott el, hogy azonban ezen összegre biztosan számíthatni, azt úgy hiszem indokolnom nem kell.

Ha tehát az előbb kimutatott 611 kor. 29 fillér bevételi többlethez ezen 480 koronát is hozzászámítjuk, akkor a zárszámadási eredmény ezen oldalon 1091 kor. 29 fillérrel javult, melyhez még a 480 kor. 93 fillér megtakarítást is hozzávéve, zárszámadásunk 1572 kor. 22 fillérrel kedvezőbb, mint az előirányzat, vagyis a deficzit 129 kor. 67 fillér.

Előadásom eddigi fonalán elhallgattam két tételt, melyek a zárszámadásra befolyással nem voltak, t. i. Karczag István úr, keszthelyi lakos az alapító tagok sorába lépett s e czímen 200 koronát fizetett a Társaság pénztárába, ezen összeg mint bevétel s mint az alaptőkéhez csatolt összeg kiadásképen is szerepel. Ennek következtében alaptőkénk, mely az 1900. év végén 12,470 kor. volt, az 1901. év végén 12,670 kor. Az előbb kimutatott deficzitünk miatt azonban Társulatunk tiszta vagyona csak 12,540 kor. 33 fillér a megelőző év végén pedig csak 12,230 kor. 49 fillér volt.

Van szerencsém továbbá jelenteni, hogy alaptőkénk azon részét, melyet magunk kezelünk, a választmány jóváhagyásával fővárosi kölcsön-kötvényekben helyeztem el, összesen 2600 kor. névértékű kötvényt vásároltam 87 árfolyammal 2262 kor.-ért. Ennek következtében a kezelésünk alatt álló alaptőkéből 108 kor. készpénz maradt fönn, mely továbbra is mint betét a Pesti hazai takarékpénztárban van elhelyezve. Az értékpapirokat s a később befolyt 200 kor. alapítványi összeget pedig a Leszámítoló és pénzváltó bank belvárosi fiókosztályában nyitott folyó számlára helyeztem el. A br. Majthényi Ottó-féle 10,000 koronás alapot az állam kezeli. A Dobszay alapítvány, illetőleg ajándék 100 koronás koronajáradék-kötvénye egyelőre még az én kezeim között van.

M. t. Közgyűlés! Minthogy a zárszámadás egyes tételei a következő évi költségvetésbe természetszerűleg változatlanul fölveendők, talán czélszerű volna most mindjárt az 1902. évi költségelőirányzatot is előadni, s a m. t. Közgyűlés úgy a zárszámadást, valamint a költségvetést is egyszerre tárgyalná s arról egyszerre határozna.

Az 1902. évi előirányzat, a zárszámadásból átvett tételektől eltekintve, az 1901. évitől nem sokban különbözik. Ajánlom, hogy a f. évi tagdíjak czímén 2100 koronát vegyünk fel, a múlt évi eredménynek megfelelően. Nyomdai költségekre múlt évben 3140 korona volt előirányozva, de azt hiszem elég lesz 3000 kor., mert a Franklin-Társulat számlája csak 2854 kor. 50 fillért tett ki. Írói tiszteletdíjakra 2400 kor. veendő fel, mert ennyi felel meg a folyóirat ívszámának. Múlt évben 88 kor.-val kevesebbet vettünk fel.

A többi tételek megegyeznek az 1901. évi előirányzattal. Jóllehet valószinű, hogy a zárszámadás majd más eredményeket fog mutatni, mégis kérem a m. t. Közgyűlést, kegyeskedjék az ajánlatba hozott tételeket elfogadni, mert a Társulat anyagi viszonyai, ha most kedvezőbb színben tűnnek is föl, mint az 1901. évi közgyűlésen, még mindig aggodalomra adnak okot. Lehetne ugyanis egyes bevételi tételeket emelni, egyes kiadási tételeket alább szállítani s ezáltal a hiányt jelentékenyen csökkenteni. Minthogy azonban úgy bevételeink, mint kiadásaink ez idő szerint még nagy hullámzást mutatnak, kérem a m. t. Közgyűlést, kegyeskedjék ezen évek óta így megállapított költségelőirányzatot az idén is elfogadni s azzal az 1439 kor. 67 fillér hiányt is megállapítani.

Ezek után kérem a m. t. Közgyűlést a számvizsgáló bizottság jelentésének meghallgatása után ezen előterjesztésemet tudomásul venni, az 1901. évi zárszámadást s azzal kapcsolatban az 1902. évi költségelőirányzatot elfogadni, s nekem a múltra nézve fölmentvényt, a jövőre nézve pedig fölhatalmazást adni kegyeskedjék.

E jelentés meghallgatása, az alábbi számadás és költségelőirányzat tételenkint való mérlegelése és a pénztárvizsgáló bizottságnak felolvasott jelentése alapján a közgyűlés egyhangulag megadja a pénztárnoknak a felmentvényt és költségelőirányzatát 1902-re elfogadja.

1901. évi zárszámadás.

BEVÉTEL

	Előirányzat Kor.	fil.	Eredmény Kor.	fil.
1900. évi zárszámadási maradvány	1805	37	1805	37
Alapitó dij	—	—	200	—
Folyó évi tagdijak	2000	—	2100	—
Hátralékos tagdijak	600	—	1006	—
M. Tud. Akademia segélye	2000	—	2000	—
Hirdetési dijak	100	—	—	—
Kamatok	550	—	583	25
Előfizetési dijak	500	—	580	—
Vegyes s átmeneti bevételek			92	04
			8366	66

KIADÁS

	Előirányzat Kor.	fil.	Eredmény Kor.	fil.
Nyomdai költségek	5797	26	3458	39
Irói tiszteletdijak	2400	—	2247	32
Expeditió	400	—	264	06
Irodai költségek	500	—	507	67
Középisk. math. tanulóverseny költs.	160	—	158	—
Vegyes kiadások	—	—	85	90
Alaptőkéhez	—	—	200	—
Pénztári maradvány *a)* készpénzben			7	58
b) tak. p. betétben			1437	74
			8366	66

Vagyon-mérleg.

VAGYON

	1900. év végén Kor.	fill.	1901. év végén Kor.	fill.
Forgó tőke:				
Készpénz	58	34	7	58
Leszámitoló és pénzváltó bankban	148	80	48	80
M. kir. postatakarékpénztárban	1598	23	1388	94
Alaptőke:				
Leszámitoló és pénzváltóbank letétszámláján:				
a) Készpénz	—	—	200	—
b) 2600 kor. névértékü főv. kötvény à 87	—	—	2262	—
Első hazai takarékp.	2370	—	108	—
1 drb koronajáradék-kötvény	100	—	100	—
Majthényi Ottó-féle alap	10000	—	10000	—
Tagdijhátralékok	600	—	300	—
Föl nem vett hirdet. dij	100	—	180	—
	14975	37	14595	32

TEHER

	1900. év végén Kor.	fill.	1901. év végén Kor.	fill.
Nyomdai tartozások	2658	88	2054	99
Ki nem fizetett irói tiszteletdijak	88	—	—	—
Tiszta vagyon	12230	49	12540	33
	14975	37	14595	32

A számadásokat megvizsgáltuk és rendben találtuk. Budapesten, 1902 ápril 2.

A választmány megbizásából: *Kövesligethy Radó dr.* s. k. A közgyülés megbizásából:

BEVÉTEL 1902. évi költségelőirányzat. KIADÁS

	1901. évi előirányzat Kor.	fill.	1902. évi előirányzat Kor.	fill.
1901. évi zárszámadási maradvány	1805	37	1445	32
Folyó évi tagdijak	2000	—	2100	—
Hátralékos tagdijakból	600	—	300	—
M. Tud. Akadémia segélye	2000	—	2000	—
Hirdetési dijak	100	—	180	—
Kamatok	550	—	550	—
Előfizetési dijak	500	—	500	—
Hiány	1701	89	1439	67
	9257	26	8514	99

	1901. évi előirányzat Kor.	fill.	1902. évi előirányzat Kor.	fill.
Nyomdai tartozások	2656	88	2054	99
Folyó évi nyomdai költségek	3140	38	3000	—
Irói tiszteletdijak:				
a) a mult évre	88	—		
b) a folyó évre	2312	—	2400	—
Expeditió	400	—	400	—
Irodai költségek	500	—	500	—
Középisk. math. tanulóverseny	160	—	160	—
	9257	26	8514	99

Feichtinger Győző
pénztárnok.

5. Választmányi tagok választása.

A Társulat alapszabályainak 20. §-a értelmében a választmányból kilépnek Beke Manó, Gruber Nándor, Heller Ágost és Réthy Mór választmányi tagok.

A közgyűlés felfüggesztetvén, megejtettek a választások, melyek eredményéről Fényes Dezső, mint a Steiner Lajos és Tangl Károly tagtársakból állott szavazatszedő bizottság elnöke, a következőt jelentette:

38 beadott szavazat közül nyert Beke Manó 37, Gruber Nándor 37, Heller Ágost 37 és Réthy Mór 36 szavazatot. Szavazatot kaptak még: Lengyel Béla, Suták József, Tangl Károly és Wittmann Ferencz tagtársak. A kilépett választmányi tagok tehát nagy szótöbbséggel újból választattak.

6. Indítványok.

Minthogy indítvány egyáltalán nem adatott be, a napirend ezen pontja elesett.

*

Ezzel a közgyűlés hivatalos része befejeződött, s miután alelnök a pénztár vizsgálására a közgyűlés részéről ismét Balog Mór és Bogyó Samú tagtárs urakat kérte fel, a gyűlést berekeszté.

*

A közgyűlést nyomban követő rendes előadó ülésen Kürschák József az elemi szerkesztések elméletéről, Pallagi Gyula az energia törvényről értekezett.

A WEHNELT-MEGSZAKÍTÓ ELMÉLETE.

A WEHNELT-megszakitó működésének magyarázatára ma meglehetősen általánosan elfogadott az a thermo-mechanikai felfogás, melyet részletesen H. TH. SIMON* fejtett ki és a mely szerint a megszakitón átvezetett áram az elektrolytnak a positiv drótvéget övező vékony rétegét az ott kifejlődő nagy JOULE-meleg folytán hirtelen elpárologtatja és így a gőzréteg a drót-elektrod és az elektrolyt között az áramot megszakitja. A megszakitás pillanatában a vezetékben önindnctiós szikra keletkezik, mely a gőzréteget a drótról az explosio mechanikai hatásával eltávolítja, ennek következtében az ismét érintkezik az elektrolyttal és újból megindul az áram; így ismétlődik tovább az áramzárás és megszakítás. TH. SIMON eredetileg a szigetelő gőzréteg eltávolítását az áram megszakadása után bekövetkezett lehülés, illetve lecsapódás által magyarázta, de E. RUHMER** kisérleteiből világos, hogy azt az önindnctiós szikra hozza létre. (Ennek újabb bizonyitékát fogom adni később a condensator hatásának leirásánál.) SIMON, RUHMER és mások kisérletei ennek a magyarázatnak meglehetős teljes qualitativ igazolását adták, különösen az elektrolyt melegitésénél és a nyomás változtatásánál, úgy hogy maga WEHNELT is eltért eredeti elméletétől, mely az egész megszakító vezetékének oscillatiós kisülésén alapult, de a kisérletek által eddig igazolást nem nyert.

Csak a megszakitó poláris viselkedéséről nem tud ez az elmé-

---

* H. TH. SIMON, Wiedemann Annalen. *68.* 1899 p. 273.

** E. RUHMER, Elektrotechnische Zeitschrift *20.* 1899 p. 456.

let számot adni; tény ugyanis az, hogy ha a drót-elektrod kathod, a megszakitó működése egészen más, mint ha az anod. KATHOD esetében a megszakitások szabálytalanok, a vezetékbe kapcsolt RHUMKORFF szikrái igen rövidek és a kathod könnyen elég. SIMON ezt a poláris viselkedést nem tudja megmagyarázni és csak utal arra, hogy a kathodon kiváló hydrogennak valami különös ismeretlen hatása lehet az oka. WALTER[1] abból, hogy kathod esetében a megszakitó már gyengébb áramnál is látszólag ép úgy működik, mint az anodnál, szintén arra következtet, hogy a kathodon kiváló két térfogat, tehát nagyobb térfogatú hydrogen gázréteg hozzájárulva a vizgőzhöz, hamarabb megszakitja az áramot, mintsem az teljes erősségét eléri.

Mindjárt WEHNELT első közlése után vizsgáltam a condensator hozzákapcsolásának befolyását a megszakitó működésére[2] és WEHNELT-től[3] eltérőleg azt találtam, hogy kis megszakitóknál a condensator parallel kapcsolása a frequentiát növeli és csökkenti az áramerősséget. WEHNELT azt találta, hogy mindig csökkentette a frequentiát. Akkor áramforrás hiánya folytán abbanhagytam a kisérleteket, de most ez rendelkezésemre állván, ismét folytattam.

Figyelmemet első sorban arra forditottam, hogy az anod és kathod esetében előálló tünemények lényegben egyformák-e, mint azt a SIMON magyarázata megköveteli.

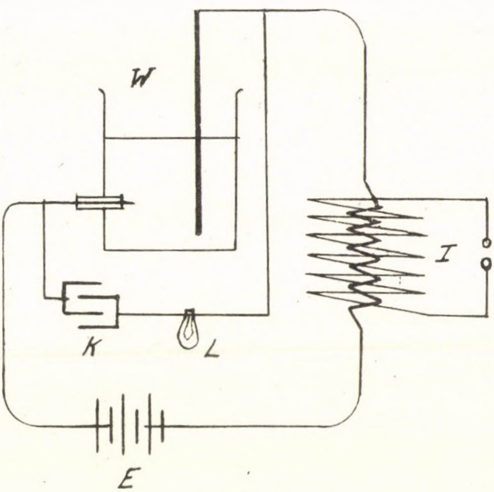
E végből azt vizsgáltam, hogy a condensator hozzákapcsolása mily befolyással van a megszakitóra a két esetben, ha t. i. a drótelektrod anod vagy kathod.

A condensator hatása, ha a csúcs anod. A megszakitó egy KOHL-féle 20 cm.-es inductor primär tekercsébe volt kapcsolva (1. ábra), áramforrásul a városi vezeték (110 Volt) szolgált. A secundär-vezetékben 4 cm.-es szikraköz volt. Vékony (0·58—0·75 mm. vastagságú és 5—6 mm. hosszú) anodok esetében most is azt

---

[1] B. WALTER u. A. VOLLER, Wied. Ann. *68*. p. 548.
[2] KLUPATHY, Math. és Physikai Lapok 1899 p. 191.
[3] WEHNELT, Wied. Ann. *68*. p. 233.

találtam, mint első kisérleteimben, hogy a condensator parallel kapcsolásánál csökken az áramerősség, növekszik a megszakítások száma és az anodon a fényjelenség csökken. A condensator vezetékébe kapcsolt 56 Voltos 16 gyertyás lámpa 0·5 mikrofaradnál már szépen világit (az áramerősség hődrótos Ampère-mérőn 0·8—1 Ampère). Nagyobb capacitás (1φ, 2φ) hozzákapcsolására a secundär szikra hangja emelkedik, de hamar kioltja a condensator a szikrát és a megszakítóban az úgynevezett «áramátcsapás»



1. ábra.

(Stromumschlag)* lép föl. Ez könnyen érthető; a condensator, úgy mint a közönséges FOUCAULT-megszakítónál, absorbeálja az önínductiós szikrát és igy a gőzbuborék megszakítva tartja az áramot. Erre mutat az is, hogy a condensator bekapcsolásánál a dróton fellépő fény gyengül. *Ez a tény szintén bizonyítja, hogy az áramzárást nem lecsapódás, hanem az önindactiós szikra mechanikai hatása hozza létre.*

Ha azonban ugyanebbe a vezetékbe 1 mm. vastag anodú megszakítót kapcsoltam, a condensator bekapcsolásánál a szikra

* KOCH u. WÜLLNER, Wied. Ann. 45. p. 475. 759. (1892).

hangja mélyebb lett és a megszakítót a condensator sokkal hamarabb kioltotta. Ez megfelel a Wehnelt által tapasztalt hatásnak, mert ő is ilyen 1 mm. vastagságú megszakítót használt. A condensator hatásának megfordulását tapasztaltam akkor is, ha ugyanazon megszakítónál a vezeték öninductióját változtattam. Erre a czélra a Rhumkorff-hoz még egy tekercset csatoltam, a melynek az öninductioját vasdrótok betevése által változtattam. Az öninductio növelésénél egy határig a frequentia növekedik, azután megfordul, csökken, a hang mélyebb lesz. Közelfekvő gondolat, hogy úgy mint azt B. Walter a közönséges megszakítónál kimutatta, itt is a condensator capacitásának változtatásával ugyancsak el lehessen érni ilyen megfordulást. A rendelkezésemre álló capacitásokkal azonban ez nem sikerült. Miután a Rhumkorff-ban a secundär szikrahossz általában csökken a condensator használatánál, a frequentia pedig növekszik, azt gondolom, hogy a condensator a zárási áram tartamát csökkenti az által, hogy a nyitási öninductiós szikra elektromossága a megszakítón át egyenlítődik ki.

Ennek az eldöntése részletes mérő kisérleteket tesz szükségessé, a melyek kivitelével most nincs módomban foglalkozni, de kitűzött czélom szempontjából egyelőre nem is nagy fontosságú.

A condensator hatása, ha a csúcs kathod, egészen elütő az előbbitől. A fényjelenség legtöbbnyire erősödik, a megszakító hangja süstörgővé válik s a fényes szikrák, melyek condensator nélkül gyakran csak a kathod egyes pontjain láthatók, az egész felületet beborítják. Egész 3φ-ig a megszakító hangmagasságában változást nem vettem észre; a kioltás nem jön létre és a condensator vezetékében az izzólámpa nem világít. Ez az előbbitől teljesen elütő viselkedés arra mutat, hogy kathod esetében a megszakítóban fellépő jelenség is lényegesen különböző attól, a mely az anodon fellép, már pedig, ha a Simon-féle magyarázatot elfogadjuk, a két jelenségnek lényegében azonosnak kellene lenni, hisz az áram által az elektrolytban létesített Joule-melegnek az anod és a kathod körül ugyanakkorának kell lenni. Ez az eltérés arra inditott, hogy a SIMON magyarázatát behatóan megvizsgáljam; különösen abból a szempontból, hogy a JOULE-meleg csakugyan létrehozhatja-e a WEHNELT-megszakítóban az elektrolyt elpárolgását az áramzárás tartama alatt?

SIMON föltételezi, hogy a JOULE-meleg erre elegendő; támaszkodik ebben RICHARZ* kisérleteire és számításaira, a ki azt találta, hogy 0·1 mm., 0·35 és 0·08 mm. vastagságú és 10 mm. hosszúságú drótok körül $1A$ áram 1 másodpercz alatt csakugyan a forrpontig melegítheti a kénsavoldatot. De hozzáteszi SIMON, hogy a WEHNELT-megszakítóban az ellenállás legnagyobb része a drót-elektrod végén — a csúcson — van s így ott még nagyobb lesz a kifejtett hő. Ha azonban RICHARZ és SIMON adatait a WEHNELT-megszakítón összevetjük, akkor az derül ki, hogy a JOULE-meleg a megszakítón nem elegendő a folyadék elpárologtatására.

RICHARZ a hengeralakú drótot körülvevő hengergyűrűben levő elektrolyt melegedését számította ki arra az esetre, ha az áram a henger tengelyére merőleges irányban halad s így a csúcs hatását nem vette számításba. Azt találta, hogy $1A$ 1 mp. alatt 50%-os kénsavoldatban

$$\vartheta = 2{\cdot}78 \frac{\log_{\text{nat}} \frac{b}{a}}{b^2 - a^2} \, C^\circ$$

felmelegedést hoz létre, ha a a drót keresztmetszetének sugara, $b-a$ az elektrolyt réteg vastagsága és 10 mm. a drót hossza. Ebből következik, hogy a drót felületén egy végtelen vékony réteg felmelegedése $(b=a)$

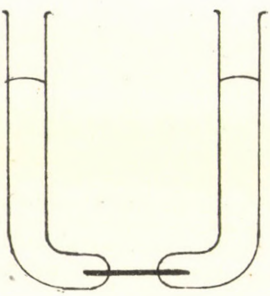
$$\vartheta_0 = \frac{1{,}39}{a^2} \, C^\circ.$$

RICHARZ kisérleteinél $a = 0{\cdot}04$ mm. s így $\vartheta_0 = 870\, C^\circ$; ez persze elegendő egy végtelen kis réteg elpárologtatására ebben az esetben.

* Wied. Ann. *39*. k. 83. 1890.

Simon adatait megtekintve látjuk, hogy egy 5 mm. hosszú, 1 mm. vastag dróttal biró megszakitó $9A$ effektiv árammal átlag $4 . 10^{-3}$ periodussal dolgozott; Richarz formulája szerint ilyen méretű drótnál $1A$ 1 mp. alatt a határfelületen már csak 22·4° felmelegedést hozna létre, $9A$ $4 \cdot 10^{-3}$ mp. alatt pedig csak 7·75°-ra melegitené fel. Ez semmiképen sem elegendő a kénsav réteg elpárologtatására, hacsak a drót végén — a csúcson — nincs nagyobb felmelegedés, mint azt Th. Simon is feltételezi.

Csúcsnélküli megszakító. Ennek eldöntésére és annak a megvizsgálására, hogy a megszakitó működésére milyen befolyással van a drót melegitése, olyan megszakitót készitettem, a melyben nincs csúcs és a melyben az elektrolyt felmelegedése az előbbi módon kiszámitható, eltekintve természetesen a vezetés, convectio stb. folytán beálló elvesztéstől; úgy hogy a számitott érték a felmelegedés maximumát adja. Az e czélra használt csúcsnélküli megszakitónál az egyenes platindrót két L alakúlag meghajlitott üvegcsőbe van beforrasztva (2. ábra), vagy egynyilású zsirkő gázégőbe kaucsukkal beerősitve. Az áram bevezetésére higany és abba merülő rézdrótok szolgálnak. Ebben a megszakitóban ezt az elektrodot egy másik külső árammal külön melegithetjük is, és azt találjuk, hogy az elektrod melegitése növeli a frequentiát, mert röviditi azt az időtartamot, a mi szükséges, hogy az elektrolyt elpárologjon. *Ez is igazolja tehát, hogy itt csakugyan a meleg hozza létre a megszakitást.* A csúcs befolyásának eldöntésére egy megszakitó edényébe két egyenlő méretű elektrodot helyeztem, az egyiket csúcs nélkül, a másikat csúcscsal s egy átkapcsolóval összekötve ugyanazon áramkörben, hol az egyik, hol a másik szolgált az ólomlemezzel szemben anodul. Azt tapasztaltam, hogy az átkapcsolásnál sem az áramerősség, sem a frequentia nem változott észrevehetően, jeléül annak, *hogy az elektrod csúcsának befolyása a megszakító működésében jelentéktelen.* És



2. ábra.

ebből következik, hogy az a JOULE-meleg, a mely az elektrodot körülvevő vékony folyadékrétegben keletkezik, nem elegendő a WEHNELT-megszakító működésének magyarázatára. Mert ha az ilyen csúcsnélküli megszakítóban a drótelektrod közelében levő $b—a$ vastagságú elektrolytréteg felmelegedését kiszámítjuk, a következő képletet nyerjük:

$$\vartheta = \frac{0\cdot24\omega \,.\, i^2 t}{\pi(b^2-a^2)\,hsc}, \text{ a hol az elektrolyt ellenállása } \omega = \varkappa \frac{l_n \frac{b}{a}}{2\pi h},$$

tehát:

$$\vartheta = \frac{0\cdot24 \,.\, \varkappa}{2\pi^2 h^2 sc} \cdot \frac{l_n \frac{b}{a}}{b^2-a^2} i^2 t, \qquad 1)$$

a hol $\varkappa$ az elektrolyt fajlagos ellenállása (Ω cm.$^{-1}$), h a drótelektrod hossza (cm.), a a keresztmetszet sugara, s az elektrolyt sűrűsége, c pedig a fajmelege, i az áram erőssége (Ampère), t az idő (s).

Az elektrod felületén levő végtelen vékony folyadékréteg ($b=a$) felmelegedése pedig

$$\vartheta_0 = \frac{0\cdot24\varkappa}{2\pi^2 h^2 sc} \cdot \frac{1}{2a^2} \cdot i^2 t. \qquad 2)$$

E két formulából például 1 mm. vastag, 5 mm. hosszú platindrót és 10%-os kénsavoldat esetében ($s = 1\cdot07$, $c = 0\cdot9$, $\varkappa = 2{,}6$) találjuk $^1/_{10}$-ed és $^1/_{1000}$-ed mm. vastagságú réteg felmelegedésére $i = 1A$, $t = 1\,s$ hatása folytán:

$$\vartheta_{0\cdot1} = 21\cdot8\,\mathrm{C}^\circ,\ \vartheta_{0\cdot001} = 26\cdot2\,\mathrm{C}^\circ,\ \vartheta_0 = 26\cdot3.$$

Ha pedig az ilyen megszakító periodusa $T = 4 \,.\, 10^{-3}$ és az áram erőssége $i = 9\,A$, akkor egy zárás ideje alatt a felmelegedés mindenesetre kisebb mint

$$\vartheta'_{0\cdot1} = 7\cdot06\,\mathrm{C}^\circ,\ \vartheta'_{0\cdot001} = 8\cdot48\,\mathrm{C}^\circ,\ \vartheta'_0 = 8\cdot52\,\mathrm{C}^\circ.$$

A JOULE-meleg tehát még a forrpontig való felmelegitésre sem elegendő, még kevésbbé az elpárologtatásra. Igaz, hogy az itt számitásba vett áramerősség a hődrótos Ampère-mérőn lemért érték, tehát a tényleges áram integrál-értéke a zárás és nyitás tartamára $\left(i = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^{T_1} i^2\, dt}\right)$; úgy hogy a zárási áram középértékét valamivel nagyobbnak, esetleg 10—11 Ampèrenek kellene számitani, de ez lényegesen nem változtat az eredményen, mert általában a zárás időtartama sokkal nagyobb, mint a megszakitásé. Másrészt azonban az a tény, hogy az elektrod melegitése növeli a frequentiát és csökkenti az áramerősséget, újabb bizonyitéka annak, hogy valóban az anod esetében helyes a párolgási magyarázat, csak más hőforrást is kell keresni, mert a Joule-meleg ennek létrehozására nem elegendő. Összevetve e tényt azzal, hogy a kathod és az anod esetében fellépő jelenségek lényegesen különböznek — tehát poláris sajátság lép föl — *a Peltier-melegben kerestem azt a hőforrást, mely a jelenségek létrehozásához szükséges.* Az a kérdés, hogy a Peltier-hatás létrehozhat-e ily nagy melegedést?

Bouty,[1] Jahn[2] és Gill[3] kisérletileg határozták meg a fémek és az elektrolytek válaszfelületein a Peltier-hatást. Különösen Bouty és Gill mérései meglehetősen egyező eredményekhez vezettek s azt mutatják, hogy legtöbbnyire a kathod lehül, az anod pedig felmelegszik. Miután pedig a fémek válaszfelületein a Peltier-hatás nagysága független a válaszfelület nagyságától, valószinüleg így van ez a fémek és elektrolytek esetében is, és akkor természetes, *hogy kis felületű elektrodokon a felmelegedés és lehülés nagy mérvű lehet.* Ez útmutatás arra is, hogy a Peltier-hatás által létrehozott hőmérsékletváltozást kis felületű elektrodokon kell mérni.

Hogy mekkora a Peltier-hatás platin és kénsavoldat vagy réz és rézsulfát estében, az egészen pontosan nincs meghatározva, de a Bouty és Gill[4] adataiból réz és rézsulfát oldatra nézve,

---

[1] Bouty, Compt. Rendus *89.* p. 146 és *90.* p. 987 (1879—80), *92.* p. 868 (1881).

[2] Jahn, Wied. Ann. *34.* p. 755 (1888).

[3] J. Gill. Wied. Ann. *40.* p. 115 (1890).

[4] Wiedemann, «Elektricität» II. Bd. p. 343.

mint legkisebb értéket, közelítőleg 150 gcaloriának vehetjük $1A$ óránként, úgy hogy 1 Ampère másodperczre $\frac{150}{3600} = 0{\cdot}042$ gcaloria és $9A$ $4.\ 10^{-3}$ mp. alatt $36.\ 10^{-3}.\ 0{\cdot}042 = 1{\cdot}5.\ 10^{-3}$ gcaloria hőt fejtene ki az anodon s ugyanennyit absorbeálna a kathodon. Ez a hőmennyiség az anod körül $^1/_{1000}$-ed mm. vastagságú réteget, a melynek térfogata $1{\cdot}6.\ 10^{-5}$ cm.^{3}, felmelegítene 100 fokra, ha a drót felületének melegedését elhanyagoljuk, mert:

$$\vartheta = \frac{1{\cdot}5.\ 10^{-3}}{1{\cdot}6.\ 10^{-5}.\ 0{\cdot}9.\ 1{\cdot}07} = 100^{\circ},$$

Míg ugyanez az áram, ugyanennyi idő alatt ebben az $^1/_{1000}$-ed mm. vastagságú rétegben $81.\ 4.\ 10^{-3}.\omega$ Joule-meleget fejleszt, a mi $q_{0.001}$ mm. $= 0.00013$ gcal., vagyis mint előbb láttuk csak 8.48 C° melegedést hoz létre. Platin és kénsavoldat válaszfelületére Gill szerint a Peltier-hatás több mint kétszer akkora, úgy hogy ott a felmelegedés 200 C°-on felül lenne.

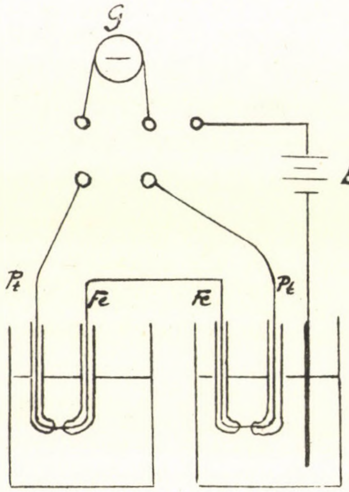
Ez adatokból világos, hogy a Peltier-*meleg olyan rendű melegedést hoz létre ilyen kis felületű elektrodokon, mely a* Wehnelt-*megszakító magyarázatára elegendő.* És pedig minél kisebb az elektrod felülete, annál inkább előtérbe lép a Peltier-meleg, mert egyrészt annál több lesz a felületegységre eső meleg-kifejlesztés, másrészt ennek megfelelőleg gyengül az áram, már pedig a Joule-meleg az intensitás négyzetével arányosan változik, míg a Peltier-meleg csak az első hatványával. Azonkívül Gill* kisérletei azt is mutatják, hogy épen a platin-kénsavoldat és a réz-rézsulfátoldat válaszfelületén a Peltier-hatás a zárás pillanatában lép föl a legnagyobb intensitással s nem növekszik arányosan az idővel, úgy hogy az ily rövid tartamú ($4.\ 10^{-3}s$) áramzárásoknál, mint a minők a Wehnelt-megszakítóban keletkeznek, a Peltier-hatás folytán a melegedés még aránylag nagyobb lesz.

Noha Bouty és Gill kisérletei kétségtelenül megállapították a Peltier-hatást az első és másodrendű vezetők válaszfelületén,

---

* Wied. Ann. 40. 1890. p. 129.

mégis közvetlen kisérlet által is meg akartam győződni, hogy a WEHNELT-megszakítóban a drót-elektrodon az kimutatható. Erre a czélra egyelőre olyan csúcsnélküli megszakítót használtam, a melyben a drótelektrodhoz az üvegcsőben közvetlenül hozzá volt forrasztva egy vasdrót, s ez által ez egy thermo-elem egyik válaszfelületéül szolgált; a megszakítón kívül egy másik edényben ugyanilyen *Pt* | *Fe* drótpár volt elhelyezve s az előbbivel összekötve thermoelemet alkotott és az egész egy HARTMANN-BRAUN-féle kis ellenállású igen érzékeny mutatós galvanometerbe volt bekapcsolható (3. ábra).



3. ábra.

Hogy minden kétséget elkerüljek, úgy jártam el, hogy mialatt a WEHNELT-megszakítón áramot vezettem át, a thermoelem vezetéke nem volt összekötve a galvanometerrel s csakis egy pillanattal a főáram megszakítása után kötöttem vele össze. S még ilyen módon is egészen nagy (4—5 osztályzat) kiütéseket mutatott a galvanometer és pedig *Pt* | H_2SO_4, Cu—$CuSO_4$ válaszfelületén a kathod lehülése és az anod felmelegedése irányában. Ellenőrzésül Ag—$AgNO_3$ válaszfelületet is megvizsgáltam s BOUTY és GILL adatainak megfelelően az ellentett hatást, t. i. a kathod felmelegedését és az anod lehülését találtam. Különösen jól sikerül a kathod lehülését a platin elektrodon kimutatni, ha olyan kis feszültséget választunk, hogy fényjelenség a drót körül nem mutatkozik, mert különben csak az anod és a kathod melegedése közötti különbséget lehet konstatálni.

Úgy is jól lehet ezt a PELTIER-hatást kimutatni, ha két thermoelem módjára összekötött csúcsnélküli megszakító helyett két bolometerként szereplő igen vékony platin drótból készült csúcsnélküli megszakítót használunk. Ezekről a mérésekről most nem kívánok részletesebben szólani, csak megemlitem, hogy az elektrocapilláris jelenségeknél is bizonynyal szerepet játszanak ezek a melegedések és lehülések, a melyek a PELTIER- és JOULE-hatás folytán a kis felületű higany elektrodokon is fellépnek és magyarázatául szolgálhatnak különösen a felületi feszültségi görbe visszatérő ágánál tapasztalt szabálytalanságoknak és annak az eltérésnek, mely a nagy és a kis higany felületeken észlelt adatok között van.

Az eddigiek által igazoltnak tartom, hogy a WEHNELT-megszakitóban tapasztalt jelenségek létrehozásában a PELTIER-hatásnak jut a főszerep. Ha a drótelektrod anod, a JOULE- és a PELTIER-meleg összeadódnak és létrehozzák a szabályszerűen ismétlődő megszakításokat, míg ha a drótelektrod kathod, akkor a túlnyomó PELTIER-lehülés folytán ilyen megszakitások csak igen erős árammál jöhetnek létre; ámde előbb fellép egy másik tünemény, mely azt a benyomást kelti, mintha itt is ugyanolyan megszakitások keletkeznének, mint az anod esetében. Ez a tünemény abban áll, hogy a hidegebb platin-kathod és a melegebb anodfolyadék között az elektrolysis közben nagy mennyiségben kiváló hydrogen rétegen át VOLTA-féle iv keletkezik. Ennek az ivnek a keletkezése okozza, hogy a kathod aránylag könnyebben elég, illetve leolvad. Hogy miért nem keletkezik iv az anodon, csak a kathodon, annak oka véleményem szerint az, hogy a hydrogengáz aránylag jó vezető, míg a vizgőz szigetelő.* Az anodon tehát a JOULE- és PELTIER-meleg együttes hatása folytán keletkező vizgőzréteg majdnem teljesen megszakitja az áramot és csak az önindúctiós szikra mechanikai hatásával (az ott keletkező explosiv gázkeverék elégetésével) hozza ismét létre az összeköttetést a positiv drótelektrod és az elektrolyt között; innen vannak a szabályos megszakítások és a nagy áramingadozások. A kathodon ellenben vizgőzréteg nem keletkezik s így a kiváló igen vékony hydrogenréteg ellenállása csökkenti az áramot, de egyúttal, ha a külső feszült-

* WINCKELMANN, «Handbuch d. Physik» III. 1. p. 343.

ség bizonyos határon túl van, alkalmat ad Volta-ív keletkezésére. Ez az oka annak, hogy kathod esetében a condensator hozzákapcsolásánál nem lehet azokat a tüneményeket tapasztalni, mint ha a drótelektrod anod és hogy a kathodfény spectruma a hydrogenén kívül a kathod fémét is adja. (Érdekes lenne ezt a hydrogenívet, úgy mint DUDDEL a rendes VOLTA ívvel tette, kellő capacitások bekapcsolásával hangzóvá tenni.) E mellett a felfogás mellett bizonyít az is, hogy a lyukas megszakító,* a melyben a megszakítások nem az elektrod felületén keletkeznek, semmi poláris tulajdonságot nem mutat.

Az anodon keletkező megszakitások periodusát SIMON bizonyos közelitéssel kiszámitani igyekezett, abból a feltevésből indulva ki, hogy a folyadék felmelegitését az áram JOULE-melege hozza létre. Ez most kiegészitésre szorul.

A csúcsnélküli megszakitóra ez a számitás könnyen elvégezhető, eltekintve a hővezetéstől, convectiotól és egyéb hőveszteségektől, melyek itt képletbe alig foglalhatók. Jelöljük a megszakitóban az áramzárás időtartamát T_1-gyel, a nyitását T_2-vel, akkor a megszakító periodusa.

$$T = T_1 + T_2.$$

A zárás tartama alatt az áram erőssége minden pillanatban a következő képlet által van kifejezve:

$$i = \frac{E}{r}\left(i - e^{-\frac{r}{L}t}\right), \qquad 3)$$

ha E a telep villamindító ereje, L a vezeték önindutiós tényezője és r az ellenállása.

A T_1 idő alatt a drót-elektroddal érintkező $(b—a)$ vastagságú kis elektrolyt-réteg hőmérséklet-emelkedése a JOULE-meleg folytán (1)

$$\vartheta_j = \frac{0{\cdot}24\varkappa}{2\pi^2 h^2 s \, . \, c} \cdot \frac{l_n \frac{b}{a}}{b^2 - a^2} \cdot \int_0^{T_1} i^2 \, dt = A \int_0^{T_1} i^2 \, dt.$$

* WEHNELT, Wied. Ann. 68. p. 233., SIMON, W. A. 68. p. 860., CALDWELL, «Elektr. Rew. N.-York» 1899.

A PELTIER-hatás folytán pedig

$$\vartheta_p = \frac{p}{s\,.\,c\,.\,h\,.\,\pi\,(b^2-h^2)}\int_0^{T_1} idt = B\int_0^{T_1} idt,$$

a hol p a PELTIER-hatás tényezője, A és B pedig az elektrod és az elektrolyttól függők, egy megszakítóra nézve állandók.

Az e kifejezésekben előforduló integrálok a 3) egyenlet tekintetbe vételével kiszámithatók és pedig

$$\int_0^{T_1} i^2\,dt = \frac{E^2}{r^2}\int_0^{T_1}\left(1-2e^{-\frac{r}{L}t}+e^{-2\frac{r}{L}t}\right)dt =$$

$$= \frac{E^2}{r^2}\left\{T_1 - \frac{2L}{r}\left(1-e^{-\frac{r}{L}T_1}\right)+\frac{L}{2r}\left(1-e^{-\frac{2r}{L}T_1}\right)\right\}$$

Ha tekintetbe veszszük, mint azt SIMON* kimutatta, hogy a vezeték időconstansa $\frac{L}{r}$ rendesen igen kicsiny, úgy hogy $e^{-\frac{r}{L}T_1}$ és $e^{-2\frac{r}{L}T_1}$ az 1 mellett elhanyagolható, akkor

$$\int_0^{T_1} i^2\,dt = \frac{E^2}{r^2}\left(T_1 - \frac{3}{2}\frac{L}{r}\right). \qquad 4)$$

Hasonló módon találjuk, hogy

$$\int_0^{T_1} idt = \frac{E}{r}\left(T_1 - \frac{L}{r}\right). \qquad 5)$$

Helyettesitve $\int_0^{T_1} i^2\,dt$ és $\int_0^{T_1} idt$ értékeit a ϑ_j és ϑ_p kifejezéseibe, nyerjük az elektrolyt-réteg összes hőmérsékletváltozását

$$\vartheta = \vartheta_j + \vartheta_p = A\frac{E^2}{r^2}\left(T_1 - \frac{3}{2}\frac{L}{r}\right) + B\frac{E}{r}\left(T_1 - \frac{L}{r}\right),$$

a miből az áramzárás tartama

* W. A. 68. p. 282.

$$T_1 = \frac{\vartheta}{A\frac{E}{r}+B}\,\frac{r}{E} + \frac{L}{r}\cdot\frac{\frac{3}{2}A\frac{E}{r}+B}{A\frac{E}{r}+B} = \frac{\vartheta\frac{r}{E}+\frac{L}{r}\left(\frac{3}{2}A\frac{E}{r}+B\right)}{A\frac{E}{r}+B}.$$

És ha a megszakítás idejét — a melyet számítani nem tudunk — T_2-vel jelöljük, akkor a megszakító periodusa

$$T = T_1 + T_2 = \frac{\vartheta\frac{r}{E}+\frac{L}{r}\left(\frac{3}{3}A\frac{E}{r}+B\right)}{A\frac{E}{r}+B} + T_2\,. \qquad 6)$$

A ϑ, a megszakító állandója, azt a hőmérsékletemelkedést jelenti, a mely szükséges, hogy az elektrolyt egy vékony rétege elpárologjon; ez függ az elektrolyt forrpontja és a tényleges hőmérséklete közötti különbségtől s hozzá járul még az elpárolgási rejtett meleg temperatura-értéke, tehát

$$\vartheta = f - t + p_f,$$

a miből azonnal kitünik, hogy a hőmérséklet (t) növekedtével ϑ csökken s így T is, tehát a frequentia nő. Ugyanez a hatása a nyomás csökkentésnek, mert ekkor f kisebbedik; fordítva a nyomás növelése csökkenti a frequentiát.

Az A és B értékei az elpárologtatott réteg vastagságától és a drótelektrod vastagságától meg hosszától függnek és pedig mindegyikkel fordítva arányosak. Minél vékonyabb a drót, annál vékonyabb lesz ez az elpárolgó réteg is és így annál gyorsabbak a megszakítások.

Ha a PELTIER-hatást nem veszszük figyelembe, vagyis $B=0$, akkor a 6) egyenlet a SIMON-féle* formulát adja kissé más formában.

Első pillanatra talán meglepő az, hogy a lyukas megszakítónál a JOULE-meleg elegendő az elektrolyt elpárologtatására, míg a WEHNELT-énél nem; csakhogy tekintetbe kell vennünk, hogy ott

---

* SIMON, W. A. 68. p. 284.

a folyadékréteg keresztmetszete kisebb. Ha például q keresztmetszetű nyilást alkalmazunk, akkor abban l hosszúságú folyadékréteg ellenállása

$$\omega = \varkappa \frac{l}{q},$$

az ebben kifejlett hő

$$Q = 0{\cdot}24 \varkappa \frac{l}{q} i^2 t.$$

A réteg tömege $m = lqs$ s így a temperaturaemelkedés

$$\vartheta = \frac{0{\cdot}24 \varkappa}{s \,.\, c\, q^2} i^2 t,$$

tehát független a réteg hosszától. Ha például a nyilás keresztmetszete $q=1$ mm.^{2} és 10%-os H_2SO_4 oldat van a megszakítóban, akkor a hőmérsékletemelkedés $i=1$ Ampère $t=1s$ alatt

$$\vartheta = \frac{0{\cdot}24 \,.\, 2{\cdot}4}{0{\cdot}9 \,.\, 1{\cdot}07 \,.\, \frac{1}{10^4}} = 6460 \text{ C}^\circ.$$

Így érthető, hogy nemcsak elpárolog a folyadék, hanem dissociál is a gőz, mint a hogy tényleg a lyukas megszakítóból felszálló gáz nagyrészt durranógáz. *A Wehnelt-megszakítónál a vízgőz dissociatiója csak az anodon jöhet létre, nagyobb mennyiségű durranógáz tényleg Wehnelt észlelései szerint csak az anodon és pedig nagyobb feszültségnél keletkezik; míg a kathodon — miután az hideg — majdnem tiszta hydrogen keletkezik, az oxygen nyomai az ívben dissociáló csekély mennyiségű vízgőztől erednek.*

A lyukas megszakítónál a periodust a következő módon fejezhetjük ki, ha megint a ϑ hőmérsékletet tekintjük a megszakító állandójának és a ϑ előbbi képletébe $\int_0^{T_1} i^2 dt$ integrál értékét helyettesítjük

$$\vartheta = a \,.\, \frac{E^2}{r^2}\left(T_1 - \frac{3}{2} \cdot \frac{L}{r}\right),$$

a hol

$$a = \frac{0{\cdot}24 \,.\, \varkappa}{s \,.\, c \,.\, q^2} = \alpha \cdot \frac{1}{q^2}.$$

S igy

$$T_1 = \vartheta \cdot \frac{r^2}{aE^2} + \frac{3}{2}\frac{L}{r},$$

tehát

$$T = \vartheta \cdot \frac{r^2 q^2}{aE^2} + \frac{3}{2}\frac{L}{r} + T_2. \qquad 7)$$

Ebből az látszik, hogy a lyukas megszakító periodusa a nyílás keresztmetszetének négyzetével arányosan növekszik.

E vizsgálat eredményei röviden összefoglalva a következők:

1) A WEHNELT-megszakító elektrodjának melegítése külső árammal növeli a frequentiát.

2) Condensator parallel kapcsolása vékony anodnál és kisebb önínductiónál szintén növeli a frequentiát, vastag drótnál és nagy önínductiónál csökkenti. A condensatorhoz kapcsolt izzólámpa világít. Nagy capacitású condensator kioltja a megszakítót, beáll az «áramátcsapás». Ez mutatja, hogy az öninductiós szikra mechanikai hatásával (az explosiv gázkeverék meggyujtásával) távolítjuk el a gőzréteget. A kathod jelenségét a condensator alig befolyásolja, a vezetékébe kapcsolt izzólámpa nem világít.

3) Az elektrolyt felmelegedése nem a csúcson jő főként létre, hanem az elektrod egész felületén, mert a «csúcsnélküli» megszakító ugyanúgy dolgozik, mint a vele egyméretű csúcsos.

4) A csúcsnélküli megszakítóra kiszámítva a JOULE-melegét, azt találjuk, hogy az nem elegendő az elektrodot körülvevő folyadékréteg elpárologtatására.

5) A PELTIER-hatás, a mely az elektrod és az elektrolyt válaszfelületén fellép, elegendő arra, hogy az anodon a szabályos megszakításokat létrehozza és megmagyarázza a poláris viselkedést. A lehülő kathodon a hydrogenben VOLTA-ív keletkezik. E mellett bizonyít az is, hogy az anodon kiválik durranógáz, míg a kathodon főként csak hydrogen.

6) A lyukas megszakítónál a megszakítás ideje a nyílás keresztmetszetének négyzetével növekszik. *Klupathy Jenő.*

A Mathematikai és Természettudományi Értesítő XX. kötet 3. füzetéből.

A PARTITIO NUMERORUM IRODALMA.

(Második és befejező közlemény.)

II.

A megelőzőkben EULER vizsgálatai nyomán megállapitottuk, hogy a partitio numerorum körébe tartozó legfontosabb szorzat-kifejtések, melyeknél a kifejtés együtthatói nincsenek explicit alakban előállitva, a következő közös tipus kifejtésére vezethetők vissza:

$$\frac{1}{(1-x^{a_1})(1-x^{a_2})(1-x^{a_n})}.$$

E feladattal behatóbban legelőször CAYLEY* foglalkozott. Tárgyalásának eredményei a következőképen foglalhatok össze:

Keressük, hogy a q szám hányféleképen tehető össze az $a, b, c...$ elemekből, melyeknek száma véges, ha az egyes elemeket többszörösen is felhasználhatjuk. A partitiók keresett számát jelöljük

$$P(a, b, c, \ldots)\, q$$

-val. Ismeretes, hogy

$$P(a, b, c, \ldots)\, q = \text{coeffs. } x^q \text{ in } \frac{1}{(1-x^a)(1-x^b)(1-x^c)\ldots} \qquad (1)$$

hol a kifejtés x növekedő hatványai szerint történik. Megjegyzendő, hogy $a, b, c, \ldots$ akkor is teljesen különálló elemeknek tekintendők a partitiókra nézve, ha közöttük egyenlők fordulnak elő.

A feladat megoldását az algebrai törtek kifejtésére vonatkozó következő elmélet szolgáltatja. Legyen a

---

* «Researches on the Partition of Numbers». Phil. Trans. CXLV. 1855 Coll. Math. Papers. vol. II.

$$\frac{\Phi(x)}{f(x)}$$

tört nevezője $(1-x^m)$ alakú egyenlő vagy különböző tényezők szorzata. Jelöljük $1-x^m$ irreduczibilis tényezőjét, a mely tehát az

$$1-x^m=0$$

egyenlet primitiv gyökeit tartalmazza,

$$[1-x^m]$$

által, akkor $1-x^m$ ilyen alakú kifejezés:

$$1-x^m=\Pi[1-x^{m'}]$$

hol m' jelenti az m valamely osztóját, beleértve 1-et, és m-et magát is. Ha tehát a az m indexek egyikének vagy többjének osztója, és k amaz indexek száma, melyeknek a az osztója, akkor

$$f(x)=\Pi[1-x^a]^k$$

alakban állítható elő. Emeljük ki az $[1-x^a]^k$ tényezőt, akkor $f(x)$ alakja

$$f(x)=[1-x^a]^k f_1(x).$$

Ezek után bebizonyítható, hogy

$$\frac{\Phi(x)}{f(x)}$$

következő módon bontható parcziális törtekre:

$$\frac{\Phi(x)}{f(x)}=I(x)+(x\partial_x)^{k-1}\frac{\Theta(x)}{[1-x^a]}+(x\partial_x)^{k-2}\frac{\Theta_1(x)}{[1-x^a]}+\cdots+$$
$$+\frac{\Theta_{k-1}(x)}{[1-x^a]}+\text{etc.}\ldots \qquad (2)$$

hol $I(x)$ jelenti az egész részt és etc. jelöli ama tört részeket, melyek a többi $[1-x^a]^k$ alakú tényezőktől függenek. Az $(x\partial_x)^m$ symbolum pedig jelenti az $x\dfrac{d}{dx}$ művelet m-szer egymásután való alkalmazását.

Tekintsük ugyanis a $\theta(x)$ függvényeket határozatlan együtthatókkal biró egész függvényeknek, a melyeknek foka egygyel alacsonyabb a megfelelő nevezőénél. A határozatlan együtthatók összes száma igy az $f(x)$ fokával egyenlő. Meghatározásukat következőkép eszközölhetjük.

Ki lehet mutatni, hogy az

$$(x\partial_x)^{k-1}\frac{\theta(x)}{[1-x^a]}$$

tag ily alakra hozható:

$$\frac{g(x)}{[1-x^a]^k}+\frac{g_1(x)}{[1-x^a]^{k-1}}+\cdots$$

hol a $g(x)$ függvények a $\theta(x)$-szel egyenlő fokuak, és együtthatóik a $\theta(x)$ együtthatóival lineárisan függenek össze. Az itt felírt tagok közül csak az első tartalmazza nevezőjében az

$$[1-x^a]^k$$

hatványt. Ha tehát az egyenletet $[1-x^a]^k$-val szorozzuk, és a szorzás után az

$$[1-x^a]=0$$

helyettesitést alkalmazzuk, akkor előáll

$$\frac{\Phi(x)}{f_1(x)}=g(x)$$

a mely kifejezés az x amaz értékeire helyes, melyek az

$$[1-x^a]=0$$

egyenlet gyökei.

Azonban az

$$[1-x^a]=0$$

egyenlet gyökeire nézve a

$$\frac{\Phi(x)}{f(x)}$$

tört olyan $G(x)$ egész kifejezés alakjában állítható elő, melynek foka egygyel alacsonyabb, mint $[1-x^a]$ foka. Így tehát a kérdéses gyökökre nézve a

$$G(x) = g(x)$$

egyenlőséget kapjuk. Ezzel $g(x)$ meg van határozva, és vele együtt $\theta(x)$ is, melynek együtthatói $g(x)$ együtthatóinak lineár kifejezései.

Következik $\theta_1(x)$ meghatározása. Erre nézve a megelőzőkből következik, hogy

$$\frac{\Phi(x)}{f(x)} - (x\partial_x)^{k-1} \frac{\theta(x)}{[1-x^a]}$$

oly tört, a melynek nevezője $[1-x^a]$-nak legfelebb $[1-x^a]^{k-1}$ hatványát tartalmazza, az $f(x)$ többi, $[1-x^{a'}]$ alakú tényezőit pedig az eredeti hatványokon. Ebből tehát $\theta_1(x)$ épúgy számitható ki, mint $\theta(x)$ a

$$\frac{\Phi(x)}{f(x)}\text{-ből.}$$

A felvett a osztóhoz tartozó $\theta(x)$, $\theta_1(x)$, $\theta_2(x)$, ... stb. függvények igy egymásból és egymásután számithatók ki. Miután ilyen módon az összes a osztókhoz tartozó parcziális törtek ki vannak számitva, a tett megfontolásokból következik, hogy ezek összegének a

$$\frac{\Phi(x)}{f(x)}$$

törtből való levonása után már egész kifejezést nyerünk. Ez lesz $I(x)$. A

$$\frac{\Phi(x)}{f(x)}$$

tört tehát csakugyan a fenti módon bontható parcziális törtekre.

Ez a felbontás már közvetetlenül megadja a

$$\frac{\Phi(x)}{f(x)}$$

tört kifejtését x növekedő hatványai szerint. Mert vegyük például a

$$\frac{\theta(x)}{[1-x^a]}$$

törtet, hol a számláló foka egygyel alacsonyabb mint a nevezőé. Mivel

$$1-x^a=[1-x^a]\,\Pi\,[1-x^{a'}]$$

hol a' az a valamely osztóját jelenti (beleértve 1-et, de magát a-t nem) a kérdéses tört így írható:

$$\frac{\theta(x)\,\Pi\,[1-x^{a'}]}{1-x^a}$$

hol szintén a számláló foka egygyel alacsonyabb a nevezőénél. Legyen például a számláló:

$$A_0+A_1x+A_2x^2+\cdots+A_{a-1}x^{a-1},$$

akkor

$$\frac{\theta(x)}{[1-x^a]}=\frac{A_0+A_1x+\cdots+A_{a-1}x^{a-1}}{1-x^a}$$

vagy:

$$\frac{\theta(x)}{[1-x^a]}=(A_0+A_1x+\cdots+A_{a-1}x^{a-1})(1+x^{1a}+x^{2a}+x^{3a}+\cdots) \quad (3)$$

E kifejezés megadja a

$$\frac{\theta(x)}{[1-x^a]}$$

törtnek hatványsorba való kifejtését. Ha ugyanis

$$q\equiv\varepsilon\ (\text{mod.}\ a)$$
$$\left(\varepsilon \begin{smallmatrix}\geqq 0\\ < a\end{smallmatrix}\right),$$

akkor

$$\text{coeffs. } x^q \text{ in } \frac{\theta(x)}{[1-x^a]}=A_\varepsilon.$$

Cayley a kifejtés együtthatóinak általános kifejezésére a következő jelöléseket használja.

Legyen a_q bizonyos czirkuláló elem, mely olyan, hogy

$$a_q=1,\quad \text{ha}\quad q\equiv 0\ (\text{mod.}\ a)$$
$$a_q=0$$

minden más esetben, akkor az

$$A_0a_q+A_1a_{q-1}+\cdots+A_{a-1}a_{-(a-1)}$$

függvény úgynevezett czirkuláló függvény vagy czirkulator a periodussal, és így jelölhető:

$$(A_0, A_1, \ldots, A_{a-1}) \text{ circlor } a_q.$$

Megkülönböztetésül a jelen esetben, midőn az A együtthatók bizonyos speciális feltételeknek tesznek eleget, nevezzük a függvényt primczirkulatornak, és jelöljük így:

$$(A_0, A_1, \ldots, A_{a-1}) \text{ pcr } a_q.$$

Ebben a jelzésben x^q együtthatója a

$$\frac{\theta(x)}{[1-x^a]}$$

tört kifejtésében

$$(A_0, A_1, \ldots, A_{a-1}) \text{ pcr } a_q,$$

és x^q együtthatója az

$$(x\partial_x)^r \frac{\theta(x)}{[1-x^a]},$$

kifejezésben

$$q^r(A_0, A_1, \ldots, A_{a-1}) \text{ pcr } a_q.$$

E szerint, ha

$$\frac{\Phi(x)}{f(x)}$$

tört számlálója alacsonyabb fokú mint nevezője, tehát a felbontásban nincs egész rész, x^q együtthatója a

$$\frac{\Phi(x)}{f(x)}$$

tört kifejtésében

$$\Sigma q^r(A_0, A_1, \ldots, A_{a-1}) \text{ pcr. } a_q$$

vagy az $a=1$ osztónak megfelelő nem czirkuláló részt külön véve:

$$\text{coeffs. } x^q \text{ in } \frac{\Phi(x)}{f(x)} = Aq^{k-1}+Bq^{k-2}+\cdots+Lq+M+$$
$$+\Sigma q^r(A_0, A_1, \ldots, A_{a-1}) \text{ pcr } a_q \tag{4}$$

hol k jelenti az $(1-x^m)$ alakú tényezők számát a nevezőben, a az m indexek valamely osztója, és ha $\varkappa$ azon indexek száma, melyeknek a osztója, akkor r lehet $0, 1, 2, \ldots, \varkappa-1$.

E fejtegetések értelmében $P(a, b, c, \ldots)q$, vagyis x^q együtthatója

$$\frac{1}{(1-x^a)(1-x^b)(1-x^c)\ldots}$$

kifejtésében lesz:

$$P(a, b, c, \ldots)q = Aq^{k-1}+Bq^{k-2}+\cdots+Lq+M+ \\ + \Sigma q^r(A_0, A_1, \ldots, A_{l-1}) \operatorname{pcr} l_q \qquad (5)$$

hol k az $a, b, c, \ldots$ elemek számát jelenti, l ezen elemek egy osztóját (1 kivételével); az összegezés kiterjed minden l osztóra és mindeniknél $r=0$-tól $r=(\varkappa-1)$-ig, ha $\varkappa$ azon elemek száma, melyeknek l osztója.

Cayley e formulája teljesen meghatározza már a keresett kifejezés alakját és szerkezetét. Megállapítja, hogy az adott elemek minden l osztójának megfelelőleg olyan tagokat tartalmaz, a melyek a q egész hatványaiból állanak, szorozva a q-nak egy-egy szakaszos függvényével. E szakaszos tagokat az illető törtfüggvény felbontásánál szereplő, és a megfelelő osztóhoz tartozó parcziális törtek számlálóinak együtthatói szolgáltatják. Azonban e parcziális törtek nincsenek kifejtett alakban előállítva, csak egyenként és egymásból való kiszámításuknak módja van megállapítva, melyet aztán minden adott speciális esetnél alkalmaznunk kell. Ezért Cayley formulájával a kérdés még egyáltalában nincs megoldva, mert eldöntetlen feladatul marad a szereplő szakaszos tagok általános kifejezésének meghatározása.

Meg kell azonban jegyezni, hogy Cayley önálló formulát is adott az egyes osztóknak megfelelő parcziális törtek kifejezésére.* Jelentse ugyanis az

$$\frac{1}{f(x)} = \frac{1}{(1-x^a)(1-x^b)(1-x^c)\ldots} \qquad (6)$$

tört parcziális törtekre bontásában az a osztónak megfelelő részt:

$$\left[\frac{1}{f(x)}\right]_{[1-x^a]},$$

* «Supplementary Researches on the Partition of Numbres». Phil. Trans. CXLVIII. 1858., és Coll. Math. Papers. vol. II.

akkor

$$\left[\frac{1}{f(x)}\right]_{[1-x^a]} = \cdots + \frac{1}{\Pi(s-1)}(x\partial_x)_{s-1}\sum\frac{X(\rho)}{\rho-x}\cdots, \tag{7}$$

hol

$$X(\rho) = \text{coeff.}\ \frac{1}{t}\ \text{in}\ t^{s-1}\ \frac{\rho}{f(\rho e^{-t})}$$

ρ az

$$[1 - x^a] = 0$$

egyenlet gyöke, Σ ezen gyökökre vonatkozó összegezést jelent, és s lehet $1, 2, \ldots, \varkappa$, ha $\varkappa$ az a osztó multipliczitása.

Tekintve, hogy e kifejezés a kérdéses parcziális törteket bizonyos kifejtési együtthatók segítségével definiálja, melyek megint nincsenek kifejtett alakban előállítva, a periodikus tagok általános kifejezései megállapításának kérdése ezzel sincs megoldva. Cayley dolgozatai tehát lényegökben véve a keresett kifejezésre nézve csak a fenti alakban (5) való előállítás lehetöségének kimutatását tartalmazzák.

A Cayley-féle formulához nehány fontos megjegyzést fűzhetünk.

Induljunk ki a formula következő alakjából, melynél az 1 osztónak megfelelő rész sincs külön választva:

$$P(a, b, c, \ldots) q = \Sigma q^r (A_0, A_1, \ldots, A_{l-1}) \operatorname{per} l_q, \tag{8}$$

hol az összegezés kiterjed minden l osztóra, 1-re is, és minden l osztónál $r=0$-tól $r=(\varkappa-1)$-ig, ha $\varkappa$ az l osztó multipliczitása.

Vezessük most be a következő jelöléseket:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\theta(x)}{[1-x^l]} &= A_{\varkappa-1}(0)+A_{\varkappa-1}(1)x^1+\cdots+A_{\varkappa-1}(l-1)x^{l-1} \\ \frac{\theta_i(x)}{[1-x^l]} &= A_{\varkappa-1-i}(0)+A_{\varkappa-1-i}(1)x^1+\cdots+A_{\varkappa-1-i}(l-1)x^{l-1} \\ &\qquad (i=0, 1, 2, \ldots, \varkappa-1) \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

akkor, ha

$$q \equiv \varepsilon\ (\text{mod.}\ l)$$
$$\left(\varepsilon \overset{\geqq}{<} \begin{matrix}0\\ l\end{matrix}\right)$$

$$(A_{\varkappa-1-i}(0), A_{\varkappa-1-i}(1), \ldots, A_{\varkappa-1-i}(l-1)) \operatorname{per} l_q = A_{\varkappa-1-i}(\varepsilon)$$

és a formula alakja lesz:

$$P(a, b, c, \ldots) q = \sum_l \left\{\sum_{r=0}^{\varkappa-1} A_r(\varepsilon)\, q^r\right\}. \tag{10}$$

hol az összegezés az összes l osztókra kiterjed, 1-re is, melynek multipliczitása k, az $a, b, c, \ldots$ elemek száma. Közvetlenül világos, hogy itt általában minden $A(\varepsilon)$ a q-ra vonatkozólag periodikus elem, mert csak az ε maradék függvénye.

A feladat teljesen meg van oldva, ha az összes osztókra nézve az

$$\underset{(r=0,1,2,\ldots,\varkappa-1)}{A_r(\varepsilon)}$$

általános kifejezését ismerjük. Ki lehet azonban mutatni, hogy a feladat megoldásához ennél kevesebb is elegendő. Vonjuk ugyanis össze a formulában a q egyenlő hatványainak együtthatóit, akkor az eredő együtthatók, mint periodikus tagok összegei, megint periodikusok, és a formula alakja lesz:

$$P(a, b, c, \ldots) q = \sum_{r=0}^{k-1} \{ \sum_l A_r(\varepsilon) \} q^r, \tag{11}$$

hol azonban a $\sum\limits_l$ összegezés már csak azon l osztókra terjedhet ki, melyeknek multipliczitása r-nél nagyobb. Jelöljük ezt a q-ra nézve szakaszos összegfüggvényt következőleg:

$$\sum_l A_r(\varepsilon) = c_r(q)$$

akkor végre a formula ilyen alaku lesz:

$$P(a, b, c, \ldots) q = c_0(q) + c_1(q) q^1 + \cdots + c_{k-1}(q) q^{k-1}. \tag{12}$$

Természetes, hogy a feladatra nézve elegendő csak a

$$\underset{(i=0,1,2,\ldots,k-1)}{c_i(q)}$$

periodikus összegfüggvények általános kifejezését meghatározni. Cayley formulája nem ad módot ezek kifejtett előállítására sem, hanem tekintettel az összetétel módjára, periodusaik nagyságát Cayley tárgyalásai alapján már meg lehet határozni.

Ugyanis a formulánál a q^{r-1} hatvány mindazon l osztóknak megfelelő részben fordul elő, melyeknek multipliczitása r, vagy r-nél nagyobb. Az összevonásban tehát q^{r-1} együtthatója

$$c_{r-1}(q) = \sum_{l} A_{r-1}(\varepsilon)$$

olyan periodikus függvény, melynek periodusa ezen osztók legkisebb közös többese. A kérdéses osztók bármelyike az elemek valamely r-edfokú kombinacziójának közös osztója. Ha tehát az elemek minden egyes r-edfokú combinacziójának közös osztóit veszszük, ezek összeségében valamennyi kérdéses osztó benne van, de más osztó, tehát olyan, melynek multipliczitása r-nél kisebb, nincsen. Most egy tetszés szerinti r-edfokú elemkombinaczió *összes* közös osztói ezen elemek legnagyobb közös osztójának osztói gyanánt állíthatók elő, így tehát a keresett érték, az összes kérdéses osztók legkisebb közös többszöröse, nem egyéb, mint *az összes r-edfokú elemkombinacziókhoz tartozó legnagyobb közös osztók legkisebb közös többszöröse.* Jelöljük ezt λ_{r-1}-el, akkor $c_{r-1}(q)$ olyan szakaszos függvény, melynek periodusa λ_{r-1}.

Például $r=1$, azaz elsőfokú elemkombinacziók esetén a legnagyobb közös osztók maguk az elemek, és ezek legkisebb közös többszöröse λ_0, mely tehát az összes osztóknak is legkisebb közös többszöröse, a $c_0(q)$ periodusa. Altalában λ_{r-1}, mint az osztók egy részének legkisebb közös többszöröse, mindig osztója λ_0-nak, az összes osztók legkisebb közös többszörösének, azaz λ_0 többszöröse az összes $c(q)$ függvények periodusainak.

Abban a speciális esetben, midőn az $a, b, c, \ldots$ elemek páronként relativ primek, vagyis mind más törzsszámokból vannak összetéve, az 1-en kívül nincs közös osztó, mely többszörösen előfordulna. Így ekkor $c_0(q)$ kivételével az összes többi $c(q)$ függvény periodusa 1, azaz értékök q-tól független, állandó.

A Cayley-féle parcziális törtekre való felbontás megadja a kérdéses raczionális törtnek *x fogyó* hatványai szerinti kifejtését is. Ugyanis a (3) szerint volt:

$$\frac{\theta(x)}{[1-x^a]} = \frac{A_0 + A_1 x^1 + \cdots + A_{a-1} x^{a-1}}{1-x^a}$$

Fejtsük itt ki az

$$\frac{1}{1-x^a}$$

törtet x fogyó hatványai szerint, akkor lesz

$$\frac{\theta(x)}{[1-x^a]}=(A_0+A_1x^1+\cdots+A_{a-1}x^{a-1})(-x^{-a}-x^{-2a}-x^{-3a}-\cdots) \quad (13)$$

Ha most

$$q\equiv \varepsilon \ (\text{mod. } a),\ (\varepsilon < a),$$

akkor

$$\text{coeffs. } x^{-q} \text{ in } \frac{\theta(x)}{[1-x^a]} = -A_{a-\varepsilon}$$

vagy mivel

$$-q \equiv a - \varepsilon \ (\text{mod. } a),$$

a CAYLEY-féle jelzésben:

$$\text{coeffs. } x^{-q} \text{ in } \frac{\theta(x)}{[1-x^a]} = -(A_0, A_1 \ldots, A_{a-1}) \text{ pcr. } a_{(-q)}$$

és

$$\text{coeffs. } x^{-q} \text{ in} (x\partial_x)^r \frac{\theta(x)}{[1-x^a]} = -(-q)^r (A_0, A_1, \ldots, A_{a-1}) \text{ pcr. } a_{(-q)}$$

Ezzel

$$\text{coeffs. } x^{-q} \text{ in } \frac{1}{(1-x^a)(1-x^b)(1-x^c)\ldots} =$$

$$= -\sum_a (-q)^r (A_0, A_1, \ldots, A_{a-1}) \text{ pcr. } a_{(-q)} \quad (14)$$

Ez az előállítás azt mutatja, hogy ha az x növekedő hatványai szerinti kifejtésnél

$$\text{coeffs. } x^q \text{ in } \frac{1}{(1-x^a)(1-x^b)(1-x^c)\ldots} = \varphi(q) \quad (15)$$

a q-nak bizonyos számelméleti függvénye, akkor az x fogyó hatványai szerinti kifejtésnél

$$\text{coeffs. } x^{-q} \text{ in } \frac{1}{(1-x^a)(1-x^b)(1-x^c)\ldots} = -\varphi(-q) \quad (16)$$

Az a függvény tehát, mely pozitiv argumentumokra nézve bizonyos particziók számát jelenti, negativ argumentumokra nézve nem jelentheti ugyanolyan particziók számát, hanem az alkotó függvénynek fogyó hatványok szerinti kifejtési-együtthatói kifejezésére szolgál.

Csakhogy a fogyó hatványok szerinti kifejtés másképp is előállitható.

Irjunk az

$$\frac{1}{(1-x^a)(1-x^b)(1-x^c)\ldots}=\sum_{q=0}^{\infty}\varphi(q)x^q$$

kifejtésben x helyett x^{-1}-et, és szorozzunk $(-1)^k x^{-S}$-el, hol $S=$ $=a+b+c+\cdots$, akkor előáll:

$$\frac{1}{(1-x^a)(1-x^b)(1-x^c)\ldots}=\sum_{q=0}^{\infty}(-1)^k\varphi(q)x^{-(q+S)} \qquad (17)$$

Innen látszik, hogy a fogyó hatványok szerinti kifejtésnél a legelső előforduló hatvány x^{-S}, úgy hogy a kifejtés ily alakba is irható:

$$\frac{1}{(1-x^a)(1-x^b)(1-x^c)\ldots}=\sum_{q=S}^{\infty}(-1)^k\varphi(q-S)x^{-q} \qquad (18)$$

A (16)-al való összehasonlítás azt mutatja, hogy

$$\left.\begin{array}{ll}\varphi(-q)=0, \text{ ha} & 0<q<S,\\ \varphi(-q)=(-1)^{k-1}\varphi(q-S), \text{ ha } q\geqq S\end{array}\right\} \qquad (19)$$

A növekedő hatványok szerinti kifejtés együtthatói tehát megadják a fogyó hatványok szerinti kifejtés együtthatóit is.*

A következőkben a partitio numerorum további irodalmát abból a szempontból fogjuk áttekinteni, hogy mennyire nyujtanak módot a $c(q)$-féle szakaszos függvények általános kifejezésének meghatározására.

III.

A partitio numerorum irodalmának többi része alig viszi tovább a kérdést azon a fokon, melyet Cayley dolgozata megállapit. Az idetartozó munkálatok ugyanis leginkább csak különféle alakú alkotó függvények előállításával foglalkoznak. A nevezetesebbek a következők.

Sylvester ** a particziók számát így állítja elő. Ha az

---

* *Jegyzet.* A (19) alatti második összefüggés Cayley-nél tévesen ily értelemben van felírva:

$$\varphi(-q)=(-1)^{S-1}\varphi(q-S).$$

** «On the Partition of Numbers». Quat. Journ. Math. vol. I. 1855.

$$a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_rx_r=n$$

határozatlan egyenlet megoldásainak száma Q, akkor

$$\theta=\Sigma W_q, \tag{1}$$

hol W_q jelenti $\frac{1}{t}$ együtthatóját a következő kifejezés t növő hat-hatványai szerinti kifejtésében:

$$\sum_\varrho \frac{\rho e}{(1-\rho^{a_1}e^{-a_1t})(1-\rho^{a_2}e^{-a_2t})\ldots} \tag{2}$$

a hol ρ a $\rho^q-1=0$ egyenlet primitiv gyöke, q pedig az $a_1, a_2, \ldots, a_r$ elemek egyikének vagy többjének osztója.

Megint más alkotó függvényt ad Faá di Bruno.* Szerinte az

$$a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_nx_n=p$$

határozatlan egyenlet megoldásainak száma következőképen állitható elő. Jelentse $[x^p]$ az x^p hatvány együtthatóját azon függvény kifejtésében, a mely mellett áll, akkor a keresett szám:

$$\frac{1}{\Pi(p)}[x^p]\left\{\delta+\log.\frac{1}{(1-x^{a_1})(1-x^{a_2})\ldots(1-x^{a_n})}\right\}^p \tag{3}$$

a hol $\Pi(p)=1.2\ldots p$, és a hatvány kifejtése után δ^i helyébe $1.2.\ldots i$ teendő.

A raczionális törtek sorba fejtésére vonatkozó különböző általános formulák szerint ugyan már independens képletekkel lehet a partitiók számát előállitani, de ezek az előállítások, bármily érdekesek is különben, nem alkalmasak a kérdés további, beható elemzésére.

Így Brioschi ** szerint, ha általában

$$\psi(x)=\frac{f(x)}{\varphi(x)}=1+C_1x+C_2x^2+\cdots, \tag{4}$$

hol az $f(x)=0$ egyenlet gyökei

$$a_1, a_2, a_3, \ldots$$

---

* «Sur la partition des nombres» Crelle, Journal, Bd. 85. 1878.

** Annali di Tortolini. VIII. 1857.

és a $\varphi(x) = 0$ egyenlet gyökei

$$\beta_1, \beta_2, \beta_3, \ldots$$

továbbá

$$s_k = \Sigma\beta^{-k} - \Sigma\alpha^{-k},$$

akkor

$$\Pi(p)\,C_p = \begin{vmatrix} s_1 & -1 & 0 & \ldots 0 \\ s_2 & s_1 & -2 & \ldots 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots \\ s_p & s_{p-1} & s_{p-2} & \ldots s_1 \end{vmatrix} \tag{5}$$

Alkalmazzuk ezt az

$$\frac{1}{(1-x^{a_1})(1-x^{a_2})\ldots(1-x^{a_n})}$$

raczionális törtre, melynél

$$f(x) = 1$$
$$\varphi(x) = (1-x^{a_1})(1-x^{a_2})\ldots(1-x^{a_n})$$

és

$$s_k = \sum_{i=1}^{n} s_k(a_i),$$

hol $s_k(a_i)$ jelenti az a_i-dik egységgyökök k-dik hatványai összegét, akkor a kifejtésben x^p együtthatója lesz:

$$C_p = \frac{1}{\Pi(p)} \begin{vmatrix} s_1 & -1 & 0 & \ldots 0 \\ s_2 & s_1 & -2 & \ldots 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots \\ s_p & s_{p-1} & s_{p-2} & \ldots s_1 \end{vmatrix} \tag{6}$$

Ez a formula, mint Faa' di Bruno * kimutatta, ilyen alakra hozható:

$$C_p = \frac{1}{\Pi(\lambda_1)\,\Pi\lambda_2)\ldots\Pi(\lambda_p)} \left(\frac{s_1}{1}\right)^{\lambda_1} \left(\frac{s_2}{2}\right)^{\lambda_2} \cdots \left(\frac{s_p}{p}\right)^{\lambda_p}, \tag{7}$$

hol

$$1\lambda_1 + 2\lambda_2 + \cdots + p\lambda_p = p.$$

Sylvester ** a következő kifejtési formulát állította elő. A

---

* «Théorie des formes binaires» pag. 157.

** John Hopkins' University Circulars. No. 20. 1883.

$$\Phi(x)=\frac{1}{a_0+a_1x^1+\cdots+a_nx^n} \tag{8}$$

raczionális tört kifejtésében x^p együtthatója:

$$\frac{1}{a_0^{p+1}}\begin{vmatrix} a_1, & a_0, & 0, & \ldots 0 \\ a_2 & a_1 & a_0 & \ldots 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots \\ a_p & a_{p-1} & a_{p-2} & \ldots a_1 \end{vmatrix} \tag{9}$$

Ez a FAA' DI BRUNO-féle formulából már levezethető.*

Végre MAC MAHON ** a következő formulát adta:

$$\frac{1}{1-a_1x^1+a_2x^2+\cdots+(-1)^na_nx^n}=$$

$$=\sum_{p=0}^{\infty}\sum(-1)^{p+k}\frac{k!}{\alpha_0!\,\alpha_1!\,\alpha_2!\ldots}\,a_1^{\alpha_1}a_2^{\alpha_2}a_3^{\alpha_3}\ldots x^p, \tag{10}$$

hol

$$\alpha_1+\ \alpha_2+\ \alpha_3+\cdots=k$$
$$1\alpha_1+2\alpha_2+3\alpha_3+\cdots=p$$
$$(k=0,1,2,\ldots,p)$$

Mindezek az előállítások, bár formailag igen egyszerűeknek látszanak, a partitio numerorumnál szereplő törtfüggvény kifejtésére alkalmazva, nem alkalmasak a CAYLEY-féle képletnél kijelölt $c(q)$ szakaszos tagok elkülönítésére, illetve azoknak önálló, independens formulában való kifejezésére.

Ezt a czélt csupán WEIHRAUCH *** a lineáris határozatlan egyenletek megoldásai számának meghatározására vonatkozó dolgozatai

* «Sur le developpement des fonctions rationelles». Americ. Journal of Math. vol. V. 1883.

** «Note on the Development of an Algebraic Fraction». Americ. Journ. of Math. VI.

*** «Die Anzahl der Lösungen diophantischer Gleichungen bei theilfremden Coefficienten». Zeitschrift für Math. und Physik. 20.

«Anzahl der Auflösungen einer unbestimmten Gleichung für einen speciellen Fall von nicht theilfremden Coefficienten». Zeitschr. f. Math. und Physik. 20. 1875.

«Anzahl der Lösungen für die allgemeinste Gleichung ersten Grades mit vier Unbekannten». Z. f. M. u. Ph. 22.

kezdik megközelíteni, ámbár csak egyszerűbb és speciális esetekben.

WEIHRAUCH nem használta az alkotó függvény előnyös segédeszközét, hanem tárgyalásait teljesen elemi úton végezte. Nem látszik továbbá tudomást venni CAYLEY dolgozatáról sem, mert a szakaszos tagok czélszerű különválasztásáról szó sincs tárgyalásaiban. Végre WEIHRAUCH a lineár határozatlan egyenletnek csak zérus nélküli, *pozitiv* egész megoldásai számát vizsgálta. Ez a szám azonban, a mint könnyen kimutatható, olyen egyszerű összefüggésben áll a *nem negativ* egész megoldások számával, hogy a kettőnek tárgyalása lényegben azonos feladatnak mondható.

Jelöljük ugyanis az

$$a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_nx_n=A$$

határozatlan egyenlet pozitiv, zérus nélküli megoldásai számát

$$f_n(A)\text{-val},$$

a nem negativ megoldásokét pedig

$$\varphi_n(A)\text{-val}.$$

Tudjuk, hogy $\varphi_n(A)$ nem egyéb, mint z^A együtthatója az

$$\frac{1}{(1-z^{a_1})(1-z^{a_2})\dots(1-z^{a_n})}=\prod_{i=1}^{n}(1+z^{1a_i}+z^{2a_i}+\cdots)$$

szorzat kifejtésében. Épígy $f_n(A)$ nem egyéb, mint z^A együtthatója a

$$\prod_{i=1}^{n}(z^{1a_i}+z^{2a_i}+z^{3a_i}+\cdots)$$

szorzat kifejtésében. Mivel

$$\Pi(z^{1a_i}+z^{2a_i}+\cdots)=z^{a_1+a_2+\cdots+a_n}\,\Pi(1+z^{1a_i}+z^{2a_i}+\cdots),$$

tehát

$$f_n(A)=\varphi_n(A+a_1+a_2+\cdots+a_n) \tag{11}$$

vagy

$$\varphi_n(A)=f_n(A-(a_1+a_2+\cdots+a_n)). \tag{12}$$

Az f_n kiszámitásával tehát φ_n is megadottnak tekinthető.

WEIHRAUCH legelső dolgozatában (Zeitschrift für Math. und Physik 20.) azt a speczialis esetet vizsgálta, midőn az

$$a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_nx_n=A$$

határozatlan egyenletben az $a_1, a_2, \ldots, a_n$ együtthatók páronként relativ primek. Az

$$f_n(A)-f_n(A-a_1a_2\ldots a_n)=f_{n-1}(A)+f_{n-1}(A-a_n)+\cdots+$$
$$+f_{n-1}(A-(a_1a_2\ldots a_{n-1}-1)a_n)$$

reductiós képlet alkalmazásával egymásután a következő formulákat számította ki.

Ha

$$P=a_1a_2\ldots a_n$$
$$A\equiv m\,(\text{mod. } P)\quad (m \overset{\textstyle =}{\underset{\textstyle >}{<}} {}^{P}_{0})$$
$$A-m=pP$$
$$S_k=a_1^k+a_2^k+\cdots+a_n^k,$$

akkor

$$n=2 \text{ esetében } f_2(A)=p+f_2(m)$$

$$n=3 \quad \text{«} \quad f_3(A)=\frac{p^2P}{2}+p\left(m-\frac{S_1}{2}\right)+f_3(m)$$

$$n=4 \quad \text{«} \quad f_4(A)=\frac{p^3P^2}{6}+\frac{p^2P}{2}\left(m-\frac{S_1}{2}\right)+$$
$$+p\left[\frac{1}{2}\left(m-\frac{S_1}{2}\right)^2-\frac{S_2}{24}\right]+f_4(m) \text{ stb.} \qquad (13)$$

A tárgyalást azonban az általános $(n=n)$ esetre kiterjeszteni nem sikerült, és WEIHRAUCH bebizonyitás nélkül, csak per analogiam következtetve írta fel a következő általános formulát:

$$f_n(A)=f_n(m)+\sum_{\nu=0}^{n-2}\frac{p^{n-\nu-1}P^{n-\nu-2}}{(n-\nu-1)!}\sum_{q=0}^{\varepsilon\left(\frac{\nu}{2}\right)}(-1)^q\frac{R^{\nu-2q}D_{2q}}{(\nu-2q)!} \qquad (14)$$

a hol

$$R=\left(m-\frac{S_1}{2}\right).$$

$\varepsilon\left(\frac{\nu}{2}\right)$ jelenti a $\frac{\nu}{2}$ törtben lévő egész számot, továbbá ha B jelent BERNOULLI-féle számot, akkor

$$\frac{S_{2\nu}B_{2\nu-1}}{2\nu\,.\,2\nu\,!}=C_{2\nu}$$

és

$$D_2=C_2$$

$$D_4=\frac{C_2^2}{2}+C_4$$

$$D_6=\frac{C_2^3}{6}+C_2C_4+C_6 \quad \text{stb.}$$

Ezek a formulák redukáló jellegűek, mert kifejezésökben $f(m)$ szerepel, mely azonban szakaszos, mert m is szakaszos elem A-ra nézve. Hogy a szakaszos tagok teljesen különválasztassanak, a

$$p=\frac{A-m}{P}$$

helyettesitéssel vezessük be a formulákba A-t, és rendezzünk ennek hatványai szerint. Így a következő alakokat nyerjük:

$$f_2(A)=\left\{f_2(m)-\frac{m}{P}\right\}+\frac{1}{P}A$$

$$f_3(A)=\left\{f_3(m)+\frac{S_1}{2P}m-\frac{1}{2P}m^2\right\}-\frac{S_1}{2P}A+\frac{1}{2P}A^2$$

$$f_4(A)=\left\{f_4(m)-\left(\frac{3S_1^2-S_2}{24P}\right)m+\frac{S_1}{4P}m^2-\frac{1}{6P}m^3\right\}+$$

$$+\left(\frac{3S_1^2-S_2}{24P}\right)A-\frac{S_1}{4P}A^2+\frac{1}{6P}A^3 \quad \text{stb.} \tag{15}$$

Ha most ezekben A helyett $(A+S_1)$-et vezetünk be, és A hatványai szerint rendezünk, megkapjuk $\varphi(A)$ formuláit, ú. m.:

$$\varphi_2(A)=f_2(A+S_1)=\left\{f_2(m)-\frac{m}{P}+\frac{S_1}{P}\right\}+\left\{\frac{1}{P}\right\}A^1$$

$$\varphi_3(A)=f_3(A+S_1)=\left\{f_3(m)+\frac{S_1}{2P}m^2-\frac{1}{2P}m^2\right\}+$$

$$+\left\{\frac{S_1}{2P}\right\}A^1+\left\{\frac{1}{2P}\right\}A^2$$

$$\varphi_4(A) = f_4(A+S_1) = \left\{f_4(m) - \left(\frac{3S_1^2-S_2}{24P}\right)m + \frac{S_1}{4P}m^2 - \right.$$
$$\left. - \frac{1}{6P}m^3 + \left(\frac{S_1^3-S_1S_2}{24P}\right)\right\} + \left\{\frac{3S_1^2-S_2}{24P}\right\}A^1 +$$
$$+ \left\{\frac{S_1}{4P}\right\}A^2 + \left\{\frac{1}{6P}\right\}A^3 \text{ stb.} \tag{16}$$

hol azonban $\quad m \equiv A+S_1 \pmod{P} \quad (m \gtreqless {}^0_P)$

tehát m itt is szakaszos elem A-ra nézve.

E kifejezésekben az A-ra nézve szakaszos és nem szakaszos részek külön vannak választva, úgy hogy itt A^1, A^2, A^3 együtthatói a Cayley-féle formulánál bevezetett

$$c_1(A), \quad c_2(A), \quad c_3(A)$$

szakaszos függvények kifejezései a felvett egyszerű speciális esetekben.

Ezek a legelső algebrai példák a $c(A)$-féle szakaszos függvények valóságos kiszámitására.

Minthogy A^0 együtthatójában a meghatározatlan $f(m)$ elem szerepel, tehát Weihrauch képletei $c_0(A)$ számára nem adnak independens kifejezést. Tetszőleges számú ilyen speciális tulajdonságú a_i elem esetére pedig egyáltalában nem lehet a meghatározást kiterjeszteni. Hanem az már a felvett egyszerűbb példákból is kitűnik, a mint különben már Cayley formulájának elemzésénél megállapitottuk, hogy a jelen speciális esetnél $c_1(A)$, $c_2(A), \ldots, c_{n-1}(A)$ az A-tól teljesen független, állandó értékek.

Weihrauch második dolgozata (Zeitschrift für Math. und Physik. 20. 314. l.) olyan speciális esettel foglalkozik, mely az általános esetet 3 ismeretlennel már magában foglalja. A másodfokú elemkombinacziók ugyanis nem relativ primek, de a 3-adfokúak már azok. Ez az eset bizonyos lineár congruenczia-rendszer megoldása által az előbbire vezethető vissza.

A harmadik dolgozat (Zeitschrift für Math. und Physik, 22) a legáltalánosabb négy ismeretlenű egyenlettel foglalkozik, midőn az együtthatók semmi specializálásnak nincsenek alávetve. Legyen az egyenlet:

$$A_1x_1 + A_2x_2 + A_3x_3 + A_4x_4 = M.$$

Jelentse b_1 az A_2, A_3, A_4 legnagyobb közös osztóját
b_2 az A_1, A_3, A_4 « « «
b_3 az A_1, A_2, A_4 « « «
b_4 az A_1, A_2, A_3 « « «

akkor A_1, A_2, A_3, A_4 ilyen alakban írhatók:

$$A_1 = b_2 b_3 b_4 B_1$$
$$A_2 = b_1 b_3 b_4 B_2$$
$$A_3 = b_1 b_2 b_4 B_3$$
$$A_4 = b_1 b_2 b_3 B_4.$$

Jelentse továbbá

c_{12} a B_3 és B_4 legnagyobb közös osztóját
c_{13} a B_2 és B_4 « « «
stb. . . .

akkor B_1, B_2, B_3, B_4 ilyen alakban írhatók:

$$B_1 = c_{23} c_{24} c_{34} a_1$$
$$B_2 = c_{13} c_{14} c_{34} a_2$$
$$B_3 = c_{12} c_{14} c_{24} a_3$$
$$B_4 = c_{12} c_{13} c_{23} a_4.$$

Így aztán

$$A_1 = a_1 b_2 b_3 b_4 c_{23} c_{24} c_{34}$$
$$A_2 = a_2 b_1 b_3 b_4 c_{13} c_{14} c_{34}$$
$$A_3 = a_3 b_1 b_2 b_4 c_{12} c_{14} c_{24}$$
$$A_4 = a_4 b_1 b_2 b_3 c_{12} c_{13} c_{23}.$$

Legyen még:

$$a_1 a_2 a_3 a_4 = A$$
$$b_1 b_2 b_3 b_4 = B$$
$$c_{12} c_{13} c_{23} c_{14} c_{24} c_{34} = C$$
$$M \equiv m \ (\text{mod. } ABC) \qquad (m \gtreqless ABC)$$
$$p = \frac{M-m}{ABC}$$
$$m + h_k A_k \equiv 0 \ (\text{mod. } b_k) \qquad (k=1, 2, 3, 4)$$
$$(h_k \gtreqless {}^{0}_{b_k})$$
$$\mu = \frac{m + A_1 h_1 + A_2 h_2 + A_3 h_3 + A_4 h_4}{b_1 b_2 b_3 b_4}.$$

Jelentse $f_4(\mu)$ a

$$B_1y_1+B_2y_2+B_3y_3+B_4y_4=\mu$$

határozatlan egyenlet *pozitiv* megoldásainak számát.

Legyen továbbá

$$B_1+B_2+B_3+B_4=S_1$$
$$B_1^2+B_2^2+B_3^2+B_4^2=S_2$$
$$\mu-B_i+h_{ik}B_k\equiv 0 \pmod{c_{ik}}$$
$$(h_{ik}\overset{\geq}{<}{}^{0}_{c_{ik}})$$
$$B_i\equiv e_{ik}B_k \pmod{c_{ik}}$$
$$(e_{ik}\overset{\geq}{<}{}^{0}_{c_{ik}})$$
$$(i=1,2,3;\quad k=2,3,4;\quad i<k)$$

végre

$$(h_{ik},\, e_{ik})_{c_{ik}}=\sum_{r=1}^{c_{ik}} rk_r,$$

hol

$$h_{ik}+(r-1)\,e_{ik}\equiv k_r \pmod{c_{ik}}$$
$$(k_r\overset{\geq}{<}{}^{0}_{c_{ik}}).$$

Ha még

$$AC=P,$$

akkor a pozitiv megoldások számát WEIHRAUCH az

$$f_4(M)=f_4(M-A_1A_2A_3A_4)+\{f_3(M)+f_3(M-A_4)+\cdots+ \\ +f_3(M-(A_1A_2A_3-1)A_4)\}$$

redukáló képlet alkalmazása által a következőképen fejezi ki:

$$f_4(M)=f_4(\mu)+\frac{1}{C}\left\{\frac{p^3P^2}{6}+\frac{p^2P}{2}\left(\mu-\frac{S_1}{2}\right)+p\left[\frac{\left(\mu-\frac{S_1}{2}\right)^2}{2}-\frac{S_2}{24}+\right.\right. \\ \left.\left.+\sum_{i=1}^{3}\sum_{k=i+1}^{4}B_iB_k\left(\frac{c_{ik}^2-1}{4}-\frac{(h_{ik},\, e_{ik})_{c_{ik}}}{c_{ik}}\right)\right]\right\}. \qquad (17)$$

Ez is reductiós jellegű képlet, mert kifejezésében $f_4(\mu)$ szerepel, mely azonban szakaszos elem M-re nézve, mert a definicziók szerint m és h_k és így μ is azok.

Hogy innen a *nem negativ* megoldások számának kifejezését megkapjuk, a

$$\varphi_4(M) = f_4(M+S_1)$$

összefüggés értelmében csak M helyébe kell $(M+S_1)$-et bevezetni. Ekkor m definicziója a következő lesz:

$$m \equiv M+S_1 \ (\text{mod.}\ ABC) \quad (m \gtreqless {}^{0}_{ABC})$$

és ezzel

$$p = \frac{M+S_1-m}{ABC}$$

azonban a h_k, μ, $f(\mu)$, h_{ik}, e_{ik}, $(h_{ik}, e_{ik})_{c_{ik}}$ szakaszos elemeknek az m-hez viszonyított kifejezése nem változik meg.

Hogy aztán az összes szakaszos elemeket különválaszszuk a nem szakaszos tagoktól,

$$p = \frac{M+S_1-m}{ABC}$$

helyettesítéssel vezessük be a formulába M-et, és rendezzünk ennek hatványai szerint. A

$$P = AC$$

egyenlet tekintetbe vételével igy végre a következő alakú kifejezést nyerjük a nem negativ megoldások számának kifejezésére:

$$\varphi_4(M) = f_4(M+S_1) = c_0(M) + c_1(M)M^1 + c_2(M)M^2 + c_3(M)M^3 \quad (18)$$

a hol:

$$c_3(M) = \frac{1}{6AB^3C^2}$$

$$c_2(M) = \frac{1}{2AB^3C^2}\left[\Sigma A_i + \Sigma A_i h_i - \frac{BS_1}{2}\right]$$

$$c_1(M) = \frac{1}{2AB^3C^2}\left[\left(\Sigma A_i + \Sigma A_i h_i - \frac{BS_1}{2}\right)^2 - \frac{B^2S_2}{12} + \right.$$

$$\left. + 2B^2 \sum_{i=1}^{3} \sum_{k=i+1}^{4} B_i B_k \left(\frac{c_{ik}^2 - 1}{4} - \frac{(h_{ik}, e_{ik})_{c_{ik}}}{c_{ik}}\right)\right] \quad (19)$$

$c_0(M)$ kifejezésében azonban már a meghatározatlan $f_4(\mu)$ szerepel, úgy hogy Weihrauch formulája négy tetszőleges elem esetében is csak $c_1(M)$, $c_2(M)$, $c_3(M)$ számára ad independens kifejezést. Ezeket a kifejezéseket czélszerű átalakításokkal még nagy mértékben lehet egyszerűsíteni. Mivel azonban a WEIHRAUCH-tól itt alkalmazott, meglehetősen nehézkes és bonyolódott eljárást tetszőleges számú (n) elem esetére kiterjeszteni úgy sem sikerült, nincs czélja itt az eddig nyert formulák további elemzésének sem. Különben, ha sikerülne is ez az általános esetre való kiterjesztés, WEIHRAUCH módszere úgysem adná a feladat tökéletes megoldását, mert a mint a legegyszerűbb eseteknél láttuk, $c_0(M)$ számára nem ad abszolut kifejezést.

WEIHRAUCH formulái szolgáltatták a legelső algebrai példákat a $c(M)$ szakaszos függvények kiszámitására. Mivel azonban WEIHRAUCH képletei csak egyszerűbb és speczialis esetekre vonatkoznak, azokat is csak részlegesen oldják meg, és a használt módszer általánosításokra nem alkalmas, a partitio numerorum irodalmában pedig ennél tovább haladást egyáltalában nem találunk, a $c(M)$ szakaszos függvények általános kifejezéseinek meghatározása ez ideig megoldatlan kérdése a partitio numerorum elméletének. Tekintve, hogy a partitio numerorum összes főbb kérdései a $c(M)$ szakaszos függvények kiszámitására vezethetők vissza, ezeknek általános meghatározása méltán képezheti a számelmélet e fejezetére vonatkozó további vizsgálatoknak legfontosabb feladatát.

Különösen kivánatossá teszik a kérdés tisztázását ama jelentékeny alkalmazások, a melyeket a partitio numerorum az invariáns elméletben talál. Meg is látszik az irodalomban az erre való törekvés. Már WEIHRAUCH, miután elemi úton nem sikerült a kérdést általánosan megoldania, az integrálszámitás alkalmazását jelölte ki czélravezető mód gyanánt. Valóban újabban KRONECKER * ebben az irányban foglalkozott a kérdéssel, midőn a többszörös integrálok elméletének alkalmazásával akarta határozatlan egyenlet-rendszereknél a «megoldások számát» meghatározni.

Teljesség kedvéért még áttekintjük a partitio numerorum irodalmának többi részét, mely azonban, mint emlitettük, nem viszi tovább a kérdést az eddig megállapitott határokon.

* V. ö. Hermite, «Note sur M. Kronecker» Comptes Rendus. T. CXIV. 1892.

A kérdés régebbi, 1859-ig terjedő irodalmát részletesen összeállítja Bellavitis.* Ezek közül a jelentőseket már felsoroltuk.

Utóbb foglalkozott a megoldások számának kérdésével még Laguerre,** a ki olyan közelítő formulát adott az

$$ax+by+\cdots+lu=N$$

határozatlan egyenlet megoldásai számának kifejezésére, hol a hiba kisebb egy fix határnál, a mely N-től független. Például

$$ax+by=N$$

megoldásai száma közelítőleg, ha a és b relativ primek,

$$T(N)=\frac{N}{ab}. \tag{20}$$

Itt a hiba 1-nél kisebb. Az

$$ax+by+cz=N$$

egyenlet megoldásai száma közelítőleg, ha a, b, c egymáshoz relativ primek,

$$T(N)=\frac{N}{2abc}(N+a+b+c). \tag{21}$$

Ez természetesen nem viszi előbbre a kérdést.

Sylvester*** később szintén visszatért a particziók kérdésére. Egyszerűbb formulákat állapított meg, és új terminologiát ajánlott. Nevezetesen az

$$ax+by+\cdots+lt=n$$

határozatlan egyenlet megoldásai számát, *denumeránsát*

$$\frac{n}{a,b,\ldots,l}$$

* «Sulla partizione dei numeri . . .» Annali di mathematica pura ed applicata. Roma. II.

** «Sur la partition des nombres». Bulletin de la Société mathématique de France. T. V. 1877.

*** «On Subinvariants». Excursus:

«On Rational Fractions and Partitions». American Journal of Math. V. 1883.

által jelöli, hol n a *numerator*, vagy *denumerator* vagy *componendus*, $a, b, c, \ldots, l$ pedig az *indexek*, *elemek* vagy *componensek*. Egyszerű kifejezéseket adott

$$\frac{n}{1, 2, 3} \text{ és } \frac{n}{1, 2, 3, 4}$$

számára.

Az eddigiek főképen a partitio numerorum kérdésének első részére, a partícziók számának meghatározására vonatkoztak. A kérdés második része, a lehetséges partícziók valóságos előállítása, eddig alig talált tárgyalásra. SYLVESTER[1] erre nézve azt a grafikus módszert alkalmazta, melyet legelőször DURFEE[2] a szimmetrikus függvények elméletében alkalmazott. (Ordinal Graph, Regular Graph). Hasonló feladattal foglalkozott PETERSEN[3] is.

Végre fel kell emliteni a partitio numerorum jelentőségének megállapitására tartozó ama fontos körülményt, hogy újabban MAC MAHON[4] a szimmetrikus függvényeknek épen a partícziók alkalmazásán alapuló új módszerét állapította meg, mely szerint a partícziók a szimmetrikus függvények szimbolikus előállítására szolgálnak.[5]

Csorba György.

---

[1] «A Constructive Theorie of Partitions», Americ. Journal of Math. V.

[2] »The Tabulation of Symmetric Functions». Americ. Journal of Math. V. 1883.

[3] «Theorie der regulären Graphs«. Acta Mat. XV. 1891.

[4] «Memoir on a New Theorie of Symmetric Functions». Am. Journ. of Math. XI. 1889.

«Second Memoir». 1890.

«Third Memoir», 1891.

«Fourth Memoir». 1892. Am. Journ. of Math.

[5] *Jegyzet.* E közlemény-sorozat második része annyiban jelenti a partitio numerorum meglehetős továbbvitelét, hogy épen azon $c(q)$-féle szakaszos függvények általános meghatározását tartalmazza, melyeknek jelentősége az elméletre nézve e dolgozatban van megállapítva. Megjelent az akadémia «Mathematikai és Természettudományi Értesítőjének» XVII-ik kötetében.

A TERÜLETI SEBESSÉG ELVE A METEOROLOGIÁBAN

A meteorologia fejlődése a legutolsó 30 év alatt oly irányban haladt, a mely lehetővé tette, hogy a nagyobbára statisztikai adatgyűjtésből, a mely hosszú ideig a meteorologia főfeladatát képezte, önálló fizikai ággá fejlődjék. E változást többek közt ama törekvés idézte elő, hogy a mechanikai törvények alkalmazásával iparkodtak a légkör mozgásának és mozgásbeli változásainak jelenségeit megmagyarázni. Az észlelési adatgyűjtés munkája azonban most is serényen, sőt serényebben folyik, mint azelőtt; de ezen adatok fő- és mondhatni fontosabb kihasználása a légmozgásról a mechanikai törvényeknek megfelelőleg megalkotott nézeteink tisztázását czélozza.

Ferrel volt az első, a ki a mechanika törvényeit a légmozgásra alkalmazta s így a meteorologia fejlődése újabb irányának az első impulzust megadta. Jelen alkalommal a mechanika egyik elvének meteorologiai alkalmazásával kivánok foglalkozni, a mely elvet Ferrel minden megszorítás nélkül a légmozgásra alkalmazott és a melyre munkáiban mindenütt hivatkozik. Ezen elv a mechanikából különösen a bolygó mozgásból jól ismert területi sebesség állandóságának elve. Követői számosan akadtak a tétel alkalmazásában.

A 80-as években azonban, a midőn Ferrel munkái, a melyeket sokáig Amerikában — szerzőjük hazájában — is csak kevesen ismertek, Európában — és talán nem tévedek, ha azt állítom, hogy Sprung «Lehrbuch d. Meteorologie» czimű munkája révén — ismeretesekké váltak, megindult — különösen német tudósok részéről, és ezek között Siemens Werner és Möller első helyen állnak — az ellenáramlat, a mely azt hangoztatta, hogy a területi sebesség elve a légkörre egyáltalában nem alkalmazható. Mint rendesen, úgy itt is az arany középút a helyes irány. A tétel bizonyos megszorításokkal alkalmazható és a következőkben az utolsó 20 év alatt e kérdés körül kifejlődött irodalomra támaszkodva * a kérdés mibenlétét és megoldási módját röviden vázoljuk.

Legyen a légkörhöz tartozó egységi tömegű légtömeg abszolut szögsebessége w, melylyel a Föld tengelye körüli forgásában való részvétele és saját nyugatról keletre irányított sebessége folytán bír (kelet-nyugati sebességnél a saját mozgás negativ) és feküdjék az r sugarú parallel kör síkjában a Föld forgási tengelyétől $\mathfrak{r}$ távolságban, akkor, ha ezen légtömeg valamely impulzus folytán mozogni kezd — FERREL szerint — úgy mozog, hogy $\mathfrak{r}^2 w$ szorzat állandó, feltéve, hogy a surlódást nem vesszük tekintetbe. Vagy más alakban:

$$\mathfrak{r}^2 w = \mathfrak{r}_0^2 w_0\,;$$

ez a bolygó mozgásból jól ismert területi sebesség elvének legegyszerűbb alakja. Ha n jeleli a Föld forgási szögsebességét, tehát $n = 0{,}0000769$ és ν, meg ν_0 a légtömeg relativ szögsebességét, akkor

$$\mathfrak{r}^2(\nu + n) = \mathfrak{r}_0^2(\nu_0 + n). \qquad 1)$$

Ha a légtömeg eredetileg relativ nyugalomban volt, tehát $\nu_0 = 0$, továbbá (közelitésben) $\mathfrak{r} = r$, $\mathfrak{r}_0 = r_0$ irunk, φ és φ_0 az r és r_0

---

* Mint e kérdésre vonatkozó nevezetesebb értekezések megemlitendők: SIEMENS WERNER: Über das allgemeine Windsystem der Erde. Sitz.-ber. d. k. preuss. Akad. d. Wiss. 1890, pag. 629 és «Über die Erhaltung d. Kraft im Luftmeere der Erde» u. o. 1886, pag. 261.

W. FERREL: «The motions of fluids and solids on the earth's surface». (RUNKLE's Mathematical Monthly), franczia forditásban (az eredetihez bajos hozzájutni). M. BRILLOUIN: Mémoires originaux sur la circulation générale de l'atmosphère; pag. 38 etc.

M. MÖLLER: Der Kreislauf d. atmosphärischen Luft zwischen hohen und niederen Breiten etc. Archiv d. Seewarte 1887., kisebb e kérdést közelebbről érintő értekezések a Meteor. Zeitschrift következő helyein találhatók: 1890. évf. pag. 172. és 411.; 1893. évf. pag. 274.; 1894. évf. pag. 114., 376., 469.; 1896. évf. pag. 353., 274.

sugarú parallelkörök sarkmagassága, R pedig a Föld középsugara, úgy 1) képletünkből

$$r = R\cos\varphi,\quad r_0 = R\cos\varphi_0$$

helyettesités után ered:

$$\nu = \left(\frac{\cos^2\varphi_0}{\cos^2\varphi} - 1\right).n,$$

és a légtömeg relativ lineáris sebessége φ sarkmagasságba jutva:

$$R\cos\varphi.\nu = v = Rn\left\{\frac{\cos^2\varphi_0}{\cos\varphi} - \cos\varphi\right\}.$$

Ha $\varphi_0 = 0$, tehát a levegőtömeg az æquatorból relativ nyugalmi helyzetből indult ki, akkor:

$$v = Rn\frac{\sin^2\varphi}{\cos\varphi},$$

vagy mivel $Rn = 465$ m. az æquator valamely pontjának a Föld forgása folytán nyert lineáris sebessége, azért

$$v = 465\frac{\sin^2\varphi}{\cos\varphi}\text{ méter.}$$

Légtömegünk tehát a területi sebesség elvének alkalmazhatósága esetén az æquatorból a különböző sarkmagasságokba a következő relativ (lineáris) sebességekkel jut:

$\varphi = 30°$-ba ... ... 134 m.
$\varphi = 60°$-ba ... ... 698 m.

azaz 60° sarkmagasság körül már 698 méter sebességű horribilis erősségű széllel volna dolgunk. Ezen eredményeket az antipassat szelekre, tehát az æquatorról (helyesebben hőæquatorról) felszálló légáramokra alkalmazva, ezeknek a nagyobb sarkmagasságú vidékekre akkora sebességekkel kellene jutniok, a melyek a tapasztalattal sehogy sincsenek összhangban. Ezen egyszerű okoskodás azt mutatja, hogy a területi sebesség elve vagy nem alkalmazható a légtömegek mozgásánál, vagy ha alkalmazható, más oknak kell közreműködnie, mely megakadályozza, hogy a légtömeg nagyobb sarkmagasságokba juthasson.

Hogy mennyiben alkalmazható a területi sebesség elve a légkörre, a hydrodinamika alapegyenleteiből könnyen kiadódik. Ezek, ha a surlódást nem vesszük tekintetbe :

$$\frac{d^2x}{dt^2} = X - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x},$$
$$\frac{d^2y}{dt^2} = Y - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y},$$
$$\frac{d^2z}{dt^2} = Z - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z},$$

hol X, Y, Z a levegőrészecskére ható erőösszetevők, p a nyomás, ρ a sűrűség. Azonkívül fennáll a kontinuitási egyenlet:

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right) = 0,$$

és egy összefüggés ρ és p között, mely a folyadék természetétől és a hőmérséklettől függ. Alkalmazzuk ezeket légkörünkre.

Legyen az x tengely a Föld forgástengelye, és a koordinátarendszer kezdőpontja a Föld középpontjában : jelelje továbbá Ω a földi nehézségi potencziál függvényét, akkor írhatjuk:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{\partial \Omega}{\partial x} - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x},$$
$$\frac{d^2y}{dt^2} = -\frac{\partial \Omega}{\partial y} - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y},$$
$$\frac{d^2z}{dt^2} = -\frac{\partial \Omega}{\partial z} - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}.$$

Behozunk egy más koordinátarendszert a következő egyenletekkel

$$x = q \cos \theta,$$
$$y = q \sin \theta \cos (nt+\lambda),$$
$$z = q \sin \theta \sin (nt+\lambda),$$

n ismét a Föld forgási szögsebessége. Világos, hogy θ a sarkmagasság kiegészítő szöge $\theta=90-\varphi$, λ a geogr. hosszúság és

q a légrészecskének a Föld középpontjától való távolsága. Nyerjük a következő egyenleteket:

$$\frac{d^2q}{dt^2} - q\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 - q\sin^2\theta\left(n + \frac{d\lambda}{dt}\right)^2 + \frac{\partial\Omega}{\partial q} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial q} = 0,$$

$$2\frac{dq}{dt}\frac{d\theta}{dt}q + q^2\frac{d^2\theta}{dt^2} - q^2\sin\theta\cos\theta\left(n + \frac{d\lambda}{dt}\right)^2 +$$
$$+ \frac{\partial\Omega}{\partial\theta} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial\theta} = 0,$$

$$\frac{d}{dt}\left\{q^2\sin^2\theta\left(n + \frac{d\lambda}{dt}\right)\right\} + \frac{\partial\Omega}{\partial\lambda} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial\lambda} = 0.$$

Ha a légrészecske relativ nyugalomban van, akkor:

$$- q\sin^2\theta \,.\, n^2 + \frac{\partial\Omega}{\partial q} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial q} = 0,$$
$$- n^2q^2\sin\theta\cos\theta + \frac{\partial\Omega}{\partial\theta} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial\theta} = 0,$$
$$\frac{\partial\Omega}{\partial\lambda} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial\lambda} = 0,$$

azaz

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{dq} = qn^2\sin^2\theta - \frac{\partial\Omega}{\partial q}\ \text{(ez pedig)} = -g,$$
$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial\theta} = n^2q^2\sin\theta\cos\theta - \frac{\partial\Omega}{\partial\theta} = 0,$$
$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial\lambda} = -\frac{\partial\Omega}{\partial\lambda} = 0,$$

a hol g a nehézségi gyorsulást jelenti. Utolsó egyenletünk tehát és most csak erre van szükségünk:

$$\frac{d}{dt}\left\{q^2\sin^2\theta\left(n + \frac{d\lambda}{dt}\right)\right\} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial\lambda} = 0.$$

Az első tag zérussá válása a területi sebesség tételét mondja ki, mert hisz előbbi jelelésünkben

$$q\sin\theta = \mathfrak{r} \quad \text{és} \quad n + \frac{d\lambda}{dt} = w.$$

Az első tag pedig zérus, ha

$$\frac{\partial p}{\partial\lambda} = 0.$$

Tehát, ha a párhuzamos körök mentén nincs nyomásváltozás, akkor a területi sebességek állandóságának tétele fennáll.

De nemcsak egy légrészecskére mutatható ki a tétel fennállása $\frac{\partial p}{\partial \lambda} = 0$ feltétel mellett, hanem kimutatható a momentum összegek állandóságának tétele — és a területi sebesség elve ennek csak geometriai alakja — oly levegőgyűrűre is, a mely a Földet körülveszi még abban az esetben is, ha $\frac{\partial p}{\partial \lambda}$ nem 0. Ehhez csak az kivántatik, hogy

$$\int_0^{2\pi} \frac{\partial p}{\partial \lambda} d\lambda = 0,$$

legyen, a mi, ha p folytonos függvénye a térnek, be is következik. Ily értelemben alkalmazta Helmholtz is a tételt a légmozgásról írt két nevezetes értekezésében.*

Más kérdés azonban az, hogy — mind a mellett, hogy a területi sebesség állandóságának tétele a légmozgásnál alkalmazható, tehát kizárjuk a surlódást és feltételezzük, hogy a parallelkörök mentén nyomáskülönbségek nincsenek — vajjon jöhetnek-e létre ilyen mozgások.

A területi sebesség elve igy szól $\mathfrak{r}^2 w = \mathfrak{r}_0^2 w_0$. Ha a levegő tömegegysége a Föld forgási tengelyétől eredetileg $\mathfrak{r}_0$ távolságban van, és eljut oly helyre, hol e távolság $\mathfrak{r}$, miközben szögsebessége w_0-ból w-re, lineáris sebessége $\mathfrak{r}_0 w_0$-ból $\mathfrak{r} w$-re változik, akkor eleven erejének változása:

$$\varDelta E = \frac{1}{2g}(\mathfrak{r}^2 w^2 - \mathfrak{r}_0^2 w_0^2),$$

és ha a területi sebesség tétele fennáll, akkor e kifejezés következő alakra hozható:

$$\varDelta E = \frac{\mathfrak{r}_0^2 w_0^2}{2g}\left(\frac{\mathfrak{r}_0^2}{\mathfrak{r}^2} - 1\right).$$

---

* Sitz.-ber. d. kön. preuss. Akad. d. Wiss. 1888, pag. 647—663. és 1889 pag. 761—780.

Ha $r<r_0$, akkor e kifejezés positiv és a légtömeg eleven ereje növekedett. Ennek ellenében munka volt véghez viendő, a mely a mindenkori czentrifugális erő legyőzése útján a forgási sugárnak r_0-ból r-be való csökkenését és ezzel az eleven erő növekedését idézte elő. Mert hisz' a czentrifugális erő legyőzésére végzendő munka

$$\Delta L = -\frac{1}{g}\int_{r_0}^{r} rw^2 dr,$$

és ha ezt a területi sebesség tételének felhasználásával kifejtjük, a fennebbi $\frac{r_0^2 w_0^2}{2g}\left(\frac{r_0^2}{r^2}-1\right)$ kifejezést kapjuk. Tehát

$$\Delta E = \Delta L.$$

Kérdés már most, hogy a légkörben fennálló viszonyok mellett állanak-e rendelkezésünkre oly és akkora erők, a melyek e munkát elvégezni képesek, a melyek tehát a légtömegnek olyan mozgását létesithetik, mely mellett a földtengelytől való r_0 távolságból r távolságba eljut, hogy e mellett a területi sebesség állandó maradjon?

A rendelkezésünkre álló erők, a melyek a meridiánok mentén hatnak és itt főkép tekintetbe jöhetnek, 1. a Föld vonzásának a pólus felé irányitott összetevője, a melynek nagysága:

$$-\frac{\partial \Omega}{q d\theta} = -n^2 q \sin\theta \cos\theta.$$

2. a horizontális irányban fennálló hőmérsékleti különbségek folytán a meridiánok mentén fellépő nyomáskülönbségek, a meteorologiában u. n. barometrikus gradiensek. Az első erő, a midőn az egységnyi levegőtömeg $\varphi_0 = 90 - \theta_0$ sarkmagasságból $\varphi = 90 - \theta$-ba halad, a következő munkát végzi:

$$(\Delta L)_1 = -\frac{1}{g}\int_{\theta_0}^{\theta_1} n^2 q^2 \sin\theta \cos\theta \, d\theta,$$

a melyből, ha vertikális mozgásoktól eltekintünk, q állandó lévén, lesz:

$$(\varDelta L)_1 = -\frac{n^2}{2g}\cdot\{q^2\sin^2\theta_1 - q^2\sin^2\theta_0\} =$$

$$(\varDelta L)_1 = -\frac{n^2}{2g}\{\mathfrak{r}^2-\mathfrak{r}_0^2\} = -\frac{n^2\mathfrak{r}_0^2}{2g}\left\{\frac{\mathfrak{r}^2}{\mathfrak{r}_0^2}-1\right\}.$$

Hogy a másodsorban említett erő folytán mekkora munka áll rendelkezésünkre, azt a barometrikus niveaufelületek alakjából vezethetjük le igen egyszerű módon.

Legyen h_0 egy bizonyos niveaufelületnek azon magassága a Föld színe felett az r_0 sugarú parallel kör síkjában, a hol a levegőrészecske van és h ugyanazon niveaufelületre vonatkozó magasság az r sugarú parallel kör síkjában, t_0 és t a h_0, illetve h vastag levegőréteg közép hőmérséklete, akkor a barometrikus magassági formula közelítő alakjából, a melyben a légnedvesség és a nehézség miatti korrekcziókat, a melyek a hőmérsékleti korrekczió mellett elhanyagolható kicsinyek, elhagyjuk, írhatjuk:

$$h_0 = Al\frac{p_0}{P_0}(1+at_0),$$

$$h = Al\frac{p}{P}(1+at),$$

a hol $A = 7991$ állandó, p_0 és P_0, p és P a légnyomást h_0, h magasságokban, illetve a Föld színén jelentik és $a = \frac{1}{273}$. Ezekből következik

$$h_0 - h = (1+at_0)Al\frac{p_0}{P_0} - (1+at)Al\frac{p}{P}.$$

Ha $P_0 = P$ lenne, a barometerállás egyforma és ezt a tényleges barometer eloszlásnál itt közelítésben feltehetjük, továbbá $p_0 = p$ — hisz ugyanazon niveaufelületen akarunk maradni, — akkor közelítőleg:

$$h_0 - h = Aa\,.\,l\left(\frac{p_0}{P_0}\right)(t_0 - t) \doteq ah_0(t_0 - t).$$

Ezen $h_0 - h$ niveaudifferenczia folytán 1 klgr. levegő a h_0 magasságban $h_0 - h$ méterkilogramm potentiális energiával bír, [ha $h_0 - h$ méterekben van kifejezve]. Jeleljük ezt $(\varDelta L)_2$-vel, tehát

$$(\Delta L)_2 = \alpha h_0 (t_0 - t).$$

Ezeket összefoglalva mondhatjuk:

1. Munkaszükségletünk arra, hogy a tömegegységnyi levegő a Föld forgási tengelyétől eredeti $\mathfrak{r}_0$ távolságából $\mathfrak{r}$ be jusson, úgy hogy a területi sebesség elve fennálljon a következő

$$\Delta L = \frac{\mathfrak{r}_0^2 w_0^2}{2g}\left(\frac{\mathfrak{r}_0^2}{\mathfrak{r}^2} - 1\right).$$

2. Ennek ellenében munkakészletünk:

a) a nehézségnek polus felé irányitott összetevője folytán:

$$(\Delta L)_1 = -\frac{\mathfrak{r}_0^2 n^2}{2g}\left\{\frac{\mathfrak{r}^2}{\mathfrak{r}_0^2} - 1\right\},$$

b) a temperatura különbségek miatt fennálló barometrikus gradiensek folytán:

$$(\Delta L)_2 = \alpha h_0 (t_0 - t).$$

Közelitésben irhatjuk

$$\mathfrak{r}_0 = R \sin\theta_0 + h_0 = r_0 + h_0$$
$$\mathfrak{r} \;= R \sin\theta \;+ h \;= r \;+ h$$

és ha $\frac{h_0}{R}$, $\frac{h}{R}$ mennyiségeket elhanyagoljuk, irhatjuk:

$$\Delta L = \frac{R^2 \sin^2\theta_0}{2g} w^2 \left\{\frac{\sin^2\theta_0}{\sin^2\theta} - 1\right\},$$

$$(\Delta L)_1 = -\frac{R^2 \sin^2\theta_0}{2g} n^2 \left\{\frac{\sin^2\theta}{\sin^2\theta_0} - 1\right\},$$

$$(\Delta L)_2 = \alpha h_0 (t_0 - t).$$

Legegyszerűbb képet nyerünk e munkák nagyságáról, ha a tapasztalati meteorologiai viszonyok alapján numerikus számitásokat végzünk. Legyen $\theta_0 = 90°$, tehát a légtömeg az æquatorban volt eredetileg és relativ nyugalomban, tehát $w_0 = n$.

Végezzük el a számitást egy magasságra; legyen pl. $h_0 = 5000$ m

θ	φ	ΔL	$(\Delta L)_1$	$(\Delta L)_2$
30°	60°	33060 mklgr.	8265 mklgr.	539 mklgr.
60°	30°	3674	2755	270
75°	15°	791	738	55

$t_0 - t$-re 30° illetve 15° és 3° vétetett fel az æquator és a 60-ik, illetve 30-ik és 15-ik szélességi kör között, a mi az évi isothermák térképén mint meglehetős szélső hőmérs. differenczia szerepel. E számok mutatják, hogy a rendelkezésünkre álló munkakészlet korántsem elegendő arra, hogy a légtömeg a területi sebesség megtartása mellett nagy sarkmagasságokba jusson. Kis sarkmagassági eltolódásra elegendő munkakészletünk áll rendelkezésünkre. Nem szabad azonban figyelmen kívül hagynunk, hogy a temperatura különbségekre meglehetős szélső értéket vettünk fel.

Az eddigi mondottakat kibővíthetjük azzal, hogy egész általánosságban kérdezzük: mily sarkmagasságig távolodhat a tömegegységnyi levegő az æquatorról, úgy, hogy a területi sebességek elvének elég legyen téve és a rendelkezésünkre álló erőktől végezhető munkánál több munkára ne legyen szükség e mozgásnál? A kerdés megoldása a következő:

$$\Delta L = (\Delta L)_1 + (\Delta L)_2,$$

vagyis

$$\frac{(Rn)^2}{2g}\,\mathrm{tg}^2\varphi = \frac{(Rn)^2}{2g}\,\sin^2\varphi + a h_0 (t_0 - t)$$

egyenlet megoldását követeli. A $t_0 - t$ különbség szintén a φ függvénye. E helyébe közelitésben

$$t_0 - t = 0{\cdot}2 + \sin\varphi\,\{40{\cdot}81 \sin\varphi - 4{\cdot}54\}$$

képletet hozzuk be.* Megoldandó egyenletünk igy irható

$$\sin\varphi\,\mathrm{tg}^2\varphi = \frac{2ag}{(Rn)^2}\cdot h_0\{40{\cdot}81 \sin\varphi - 4{\cdot}54\} + \frac{2ag}{(Rn)^2}\cdot h_0\,\frac{0{\cdot}2}{\sin\varphi}$$

* E képletet Hann következő képletéből † nyertük:

$$T_\varphi = 26{\cdot}0 + 4{\cdot}54 \sin\varphi - 40{\cdot}81 (\sin\varphi)^2$$

E képlet a déli félgömbre érvényes és T_φ maximum értékének $T_\varphi^{max} = 26{\cdot}2$ C°-t adja $\varphi = 3\frac{1}{4}$ foknál. Ebből mi

$$T_\varphi^{max} - T_\varphi$$

† Hann: Lehrb. d. Meteorologie, pag. 150.

$h_0 = 5000$ m. esetében, ezen egyenlet:

$$\sin\varphi \operatorname{tg}^2\varphi = 0{\cdot}001662\{40{\cdot}81 \sin\varphi - 4{\cdot}54\} + \frac{0{\cdot}0003324}{\sin\varphi}$$

és gyöke $\varphi = 11°$, $h_0 = 10{,}000$ m. esetében

$$\sin\varphi \operatorname{tg}^2\varphi = 0{\cdot}003324\{40{\cdot}81 \sin\varphi - 4{\cdot}54\} + \frac{0{\cdot}0006648}{\sin\varphi}$$

és gyöke $\varphi = 16{\cdot}5$.

Ezen számadatok nem pontos adatok, de eléggé tájékoztatnak arról a fontos körülményről, hogy légkörünkben korántsem rendelkezünk akkora munkakészlettel, a mely a légtömegeknek a területi sebesség elvének megtartása mellett az æquatorról nagyobb sarkmagasságokba juthatását lehetővé tenné. Csak igen korlátolt közben mozoghat a légtömeg a területi sebesség megtartása mellett.

Steiner Lajos.

---

kifejezést hoztuk le. Ez nem adja tulajdonkép az æquator és a φ sarkmagasságú parallel kör hőmérsékletének különbségét, hanem a hőæquator és φ sarkmagasságú parallel kör hőmérséklet-különbségét és csak a leg-alsó légrétegekben. Jelen czélunknál, a hol csak tájékoztató számadatok nyeréséről van szó, ettől a körülménytől eltekinthetünk.

Utalványczím: Math. és Phys. Társ. 5997. sz. cheque-számlájára.

Kimutatás

az 1902. május 1-től október 15-ig befolyt díjakról.

Tagsági díjat fizettek:

1897. évre: Kappel György ... 6 kor.
1898. évre: Bujk Béla ... 6 kor.
1900. évre: Cholnoky Jenő ... 10 kor.
1901. évre: Angheben Albin 6 k., Bánki Donát 10 k., Bartoniek Géza 10 k., Bruck Ferencz 10 k., Cholnoky Jenő 10 k., Fodor László dr. 6 k., Groó Vilmos 6 k., Haussmann Alajos 10 k., Horváth József 6 k., Kados Aladár 10 k., Konkoly Thege Miklós dr. 10 k., Kurländer Ignácz 10 k., Pallagi Gyula 6 k., Pfeiffer Péter 6 k., Schmidt János dr. 6 k., Söpkéz Sándor 10 k., Szavkay Ede 10 k., Szathmáry Jenő 6 k., Szirtes Ignácz 10 k., Visnya Aladár 10 k., Terkan Lajos 6 k. Összesen 12 à 10 k., 9 à 6 k. ... 174 kor.
1902. évre: Anderkó Aurél dr. 10 k., Arató Frigyes 6 k., Babiák Nándor 6 k., Baló Gyula 6 k., Barabás Jenő 6 k., Bihary Ferencz 6 k., Blau Ármin 6 k., Bruck Ferencz 10 k., Bruckner Károly 6 k., Burkovits Lajos 6 k., Cholnoky Jenő 7 k., Csajkás Mihály 6 k., Csehély Adolf 6 k., Czakó Adolf 10 k., Czigler Győző 10 k., Demetzky Mihály 10 k., Dirner Gusztáv dr. 10 k., Ellend József 6 k., Farbaky István dr. 10 k., Feichtinger Győző 10 k., Fölser István 10 k., Frank Dezső 6 k., Frank István 6 k., Fröhlich Károly 10 k., Füzy Rezső Vilmos 10 k., Gerecz Lajos 6 k., Gerevich Emil 6 k., Gidró Bonifácz 6 k., Glücklich Vilma 10 k., Hajnal Márton 10 k., Halmi János 6 k., Hauser Ignácz 6 k., Hlatky Miklós 6 k., Hőgyes Endre dr. 10 k., Iszlay József dr. 10 k., Javorik János 6 k., Jeney Pál 6 k., Jónás Ödön 10 k., Karai Sándor 6 k., Képessy Imre 10 k., Kerekes Dezső 6 k., Király László 6 k., Kirchknopf András 6 k., Kiss Dénes 6 k., Kisgyörgy János 6 k., Kovács Béla 6 k., Kovács István 6 k., Köcse István 6 k., Kúthy József dr. 6 k., Lengyel Endre 6 k., Lukácsi György 6 k., Medvigy János 6 k., Melczer Gusztáv 10 k., Molnár Sándor 6 k., Morotz Kálmán 6 k., Némethné Földes Izabella 6 k., Ondrus Pál 6 k., Osztrogonácz János 6 k., Pecz Samu 10 k., Pék János 6 k., Perényi

Kandid 6 k., Pfeiffer Péter 6 k., Pantea Jenő 6 k., Plósz Pál dr. 10 k., Ratkovszky Pál 6 k., Rátz László 10 k., Récsei Lajos Farkas 6 k., Riegler Sándor 6 k., Róna Zsigmond 10 k., Schimanek Emil 10 k., Scholtz Ágost dr. 10 k., Schöndorfer Gyula 6 k., Róth Ágoston 6 k., Steiner Lajos dr. 10 k., Steiner Miklós k., Straub Sándor 10 k., Szakmáry József 6 k., Szalay István 6 k., Szavkay Ede 10 k., Szabó Gábor 10 k., Szentmiklósy Jenő 6 k., Szemethy Béla 10 k., Széprétliy Béla 6 k., Szily Kálmán 10 k., Szuppan Vilmos 10 k., Terlanday Emil 10 k., Vater József 10 k., Visnya Aladár 10 k., Wéber Márton 6 k., Willim Ferencz 6 k., Wodeczky József 6 k., Závodszky Adolf 10 k., Zettner Ede 10 k. Összesen 36 à 10 k., 1 à 7 k., 56 à 6 k. ... ... 703 kor.

1903. évre : Arató Frigyes 6 k. ... ... 6 kor.

1904. évre : Arató Frigyes 6 k. ... ... 6 kor.

1905. évre : Arató Frigyes 2 k. ... ... 2 kor.

Előfizetési dijet fizettek:

1901. évre : az ógyallai meteorologiai int. ... 10 kor.

1902. évre : Pfeiffer Ferdinánd 10 k., az aradi áll. tanítóképezde 10 k., az aradi áll. főreáliskola 10 k., a debreczeni főreáliskola 10 k., a kecskeméti főreáliskola 5 k., a késmárki ev. lyceum 10 k., a kolozsvári kegyes r. Kalazantinum 10 k., a nagyváradi áll. főreáliskola 10 k., a szabadkai főgymnasium 10 k., az ujvidéki kir. kath. főgymnasium 10 k. Összesen ... ... 95 kor.

Összesen befolyt:

Hátrálékokból	196 kor.,	január 1-től ...	637 kor.
1902. és köv. évi díjból ...	717 kor.,	« «	1933 kor.
Előfizetési díjakból	105 kor.,	« «	582 kor.

Helyreigazítás: A Math. és Phys. Lapok f. évi 5. füzetében közölt kimutatásban az 1902. évi dijat megfizetők közül: Schenek István dr. (10 k.) és Suták József dr. (10 k.) neveik nyomda-hibából kimaradtak. Az általuk befizetett összegek azonban az ott kimutatott végösszegekbe be voltak számítva.

Budapest, 1902 október 16-án.

Frichtinger Győző
pénztárnok.
(VII. Aréna-út 66. III. 19.)

A NEGYEDRENDŰ ELSŐFAJÚ TÉRGÖRBÉN LEVŐ PONTKONFIGURÁCZIÓK HELYZETGEOMETRIAI TÁRGYALÁSA.

(Első közlemény.)

Clebsch-nek a harmadrendű síkgörbék elméletében alapvető dolgozata nyomán Harnack és mások az elsőfajú negyedrendű térgörbe pontjainak homogén koordinátáit egy parameter különböző elliptikus függvényeiként állítják elő; ezeknek az előállításoknak közös tulajdonsága, hogy a görbének valamely tetszés szerinti algebrai felülettel való metszéspontjait az a reláczió jellemzi, hogy parametereik összege periodus. Ez az összefüggés a görbe konfiguráczióinak vizsgálatát számelméleti kongruencziák vizsgálatára vezetvén vissza, a következtetések a geometriai következtetéseknél lényegesen egyszerűbb és áttekinthetőbb alakot nyertek; és valóban, az e konfiguracziókra vonatkozó eredmények nagyobb részét az analitikai vizsgálatok szolgáltatták; az analitikai módszer csakhamar a tételek egész rendszerét épitette föl, a melyhez a geometriai alig volt képes az alapot szolgáltatni. Ugy látszik, az analitikai vizsgálatok segitségével e rendszer ma már be van tetőzve; legalább fontos, lényegesen új eredményre nincsen kilátás.

Ha mégis egy ennyire átdolgozott körből meritem tárgyamat, ezt azért teszem, mert a feladat csak szinleg hálátlan: hisz a görbe pontkonfiguráczióinak elmélete koránt sincs befejezve. A mathematikusnak kettős feladata van: tényeket keresni és kutatni a talált és már ismert tények közötti kapcsolatot; beiktatni a találtakat összefüggő, ellenmondás nélkül való rendszerbe. Az eredmények nagy részét analitikai úton találtuk, mert ez úton könnyebb az invenczió; de elméletünk tárgyának természeténél fogva a geometria, vagy még nagyobb megszoritással, — a vizsgálatok nélkülözvén minden metrikus jelleget — a helyzetgeometria keretébe tartozik. Kérdés, még pedig fontos kérdés ennélfogva, vajjon mikép fejthető ki elméletünk azon alapokon, a melyek a helyzetgeometria fölépítésére szolgálnak?

A helyzetgeometria a pont, az egyenes és a sík koincziden-cziájára vonatkozó elvekből indulva ki, első sorban a legelemibb rokonságokat: a projektivitást és a recziproczitást definiálja a különböző sorozókon. Ezek a rokonságok hozzák létre az elemekhez legközelebb álló téralakzatokat: a másodrendű és a másodosztályu görbéket és felületeket. Annak a kérdésnek a vizsgálata, hogy ez alakzatok közül bármelyik az elemek valamelyikével koinczidenczia-vonatkozás: metszéssel vagy projicziálással minő alakzatot hoz létre, a már ismert alakzatok körébe vezet. A legközelebbi vizsgálat tárgya új alakzatok keresésénél az előbbieknek egymás közti összefüggése: a geometria fölépítésénél a természetes sorrendben legközelebb következő alakzatokat a másodrendű, ill. másodosztályú alakzatok koinczidenczia-vonatkozásai fogják szolgáltatni. Ily módon bizonyos térgörbékre és lefejthető felületekre jutunk, a melyeknek keletkezésmódja és ezzel elmélete duális, természetesen csak addig, míg helyzetgeometriai alapon maradva metrikus vonatkozásokat nem veszünk figyelembe.

Másrészt a másodrendű és másodosztályú felületeknek egy osztálya, a másodrendű és másodosztályú vonalfelületek a koinczidenczia fogalmából az általánosnál sokkal közvetetlenebbül építhetők fel. Azok a térgörbék, ill. developpábilis felületek, melyekre a föntebb jelzett vizsgálatok vezetnek, mindig mint ilyen vonalfelületek áthatásai, ill. közösen körülírt developpábilis felületei állíthatók elő, és ebben találjuk a legközvetetlenebb útat, a mely ezen alakzatok fölépítésére vezet. Még könynyebbé tehetjük feladatunkat, ha általánosítás útján a képzetes elemeket a helyzetgeometriába bevezetetteknek és a valós elemekkel egyenlő rangúaknak tekintjük, a minek révén minden másodrendű felülettel, mint vonalfelülettel dolgozhatunk.

Bizonyos specziális esetekben a másodrendű felületek áthatásának része lehet egyenes (pontsor) vagy kúpszelet, a másodosztályú felületeknek közösen körülírt developpábilis felület része ugyancsak egyenes (siksor) vagy másodosztályú kúpfelület. De új alakzatok is jelentkeznek: parcziális áthatásként a harmadrendű, totális áthatásként a negyedrendű elsőfajú térgörbe és ugyancsak az ezeknek dualiter megfelelő developpábilis felületek.

Ezen az úton épithető fel a negyedrendű elsőfajú térgörbe geometriai elmélete és ezen az úton származtatják Reye és Schroeter a görbe alapvető tulajdonságait a másodrendű felületek tulajdonságaiból. Ezekből az alapvető tulajdonságokból fölépithető azon konfigurácziók elmélete is, a melyeknek a görbe, egyrészt mint tetraédrálisan szimmetrikus görbe, másrészt mint egy felületsor alapgörbéje, sorozója.

Azok a geometrák, a kik a negyedrendű elsőfajú térgörbe elméletét geometriai alapon törekedtek fölépiteni, többnyire nem ezen a helyzetgeometria fölépitésekor természetszerüleg kinálkozó úton jártak, hanem a görbe tulajdonságait projekcziójának, a harmadrendű hatodosztályú síkgörbének tulajdonságaiból származtatták. Schroeter is több helyen felhasználja bizonyításaiban az utóbbi görbét. Milinovsky utalt először arra a körülményre, hogy az egyszerűbb és természetesebb út az ellenkező, t. i. a 3-adrendű és 6-odosztályú síkgörbe tulajdonságainak a 4-r. elsőfajú térgörbéiből való levezetése, mivel az utóbbi görbe származtatása a közvetlenebb. Hasonló fölfogásra mutat Disteli munkája: Die Steiner'schen Schliessungsprobleme etc. Általában a kettősponttal biró és a kettősponttal nem biró 3-r. síkgörbék és a 2, ill. 3 kettősponttal biró 4-r. síkgörbék a legutóbb megismert téralakzatokból különböző módokon, mint térgörbék projekcziói és mint developpábilis felületek síkmetszései származtathatók.

A jelen dolgozat a negyedrendű elsőfajú térgörbe pontkonfiguráczióinak elméletét a jelzett úton, a 3-r. síkgörbe elméletétől függetlenül törekszik fölépíteni. Kiindulva a más helyeken adott alapvető tételekből, a projicziálás fogalmának bevezetésével és az e transzformáczió problemájában alapvető tétel megállapitásával sikerül az eddigieknél lényegesen egyszerűbb tárgyalást adnom; míg az ismételt projicziálások transzformácziójának bevezetésével a STEINER-féle záródási problemákat vizsgálom egyrészt egyszerű és könnyen áttekinthető, de azért szigorú és beható módon, másrészt az eddig csak analitikai módszerekkel vizsgált kongruens pontrendszerek elméletét helyzetgeometriai alapon épitem fel.

Ily módon tárgyalom a negyedrendű elsőfajú térgörbére vonatkozó problemákat a geometriailag természetes egymásutánban. De a geometriai tárgyalás problemája az analitikai tárgyalásra való tekintettel új, egészen más alakban is fölvethető. Az analitikai tárgyalás alapját ugyanis két körülmény képezi: az egyik, hogy a görbe pontjainak sokasága bizonyos módon egy határozott számkontinuumra leképezhető; a másik, hogy ebben a leképezésben a görbe és egy tetszés szerinti algebrai felület metszéspontjainak megfelelő számok közt bizonyos összefüggés létezik; ezeken épül föl a görbe konfiguráczióinak analitikai elmélete. Kérdés, vajjon létezik-e a geometriai tételek egy ezzel egyenlő értékű vagy legalább részben egyenlő értékű rendszere? és ha igen, szimbolizálhatók-e e tételek oly alakban, hogy külső alakjuk és a velük való további operáczió a föntebbi analitikai tételek alakjával és a velük való operáczióval, esetleg csak bizonyos korlátok közt, megegyezzék? Vagyis végre adható-e geometriai úton a görbe pontjainak egy a föntebbivel alakjára és tulajdonságaira legalább részben megegyező analitikai előállítása? Ha sikerülne erre a kérdésre az igenlő választ megtalálnunk, úgy a geometriai és az analitikai tárgyalás bizonyos pontban találkoznának, és oly kérdésekre, a melyekre analitikailag könnyű a felelet, míg a geometriai megoldás látszólag nehézségekbe ütközik, ezentúl az analitikai megoldás menetének geometriai értelmezésével geometriailag is könnyű volna a válasz; mert az analitikai operáczió a geometriai operácziónak egy a geometriai nyelvre átültethető szimbolumává válnék.

Erre a kérdésre jelen munka ugyan még nem adja meg a végleges választ, de egyrészt azt a kongruens pontrendszerek elméletével geometriailag részben előkészíti, másrészt kijelölni törekszik ama vizsgálatok jellegét és irányát, a melyekkel a kérdésre válasz nyerhető. A kérdés megoldása azonban még beható vizsgálatot kiván.

A mi a görbe irodalmát illeti, azt bőven fölsorolja SCHROETER a görbéről szóló munkájának (Rein geometrische Theorie der Raumkurve 4. O. I. Sp. Leipzig 1890) előszavában. Még csak VÁLYI GYULA egy czikkét említem meg (A 4-r. 1-f. térgörbékről, Math. és term. értesitő X. k.), kitől terminologiám nehány kifejezését, mint: húrrendszer, projicziálás, triász, n-ász, kölcsönöztem.

Alaptulajdonságok. Húrrendszerek. Reye-féle pontcsoport. Projicziálás a görbén. Megfelelő pontpárok.

A negyedrendű elsőfajú* térgörbe két oly másodrendű felület metszésvonala, a melynek sem közös egyenesük, sem közös síkmetszésük nincsen. Ha a görbe valamely pontjában a két felületet ugyanazon sik érinti, akkor az illető pont a görbének vagy kettős, vagy visszatérő pontja.* A következőkben csak oly negyedrendű elsőfajú térgörbékről lesz szó, a melyeknek sem kettős, sem visszatérő pontjuk nincsen. Az ilyen görbét a rövidség okáért $C_{\mathrm{I}}^{(4)}$-gyel fogjuk jelölni.**

A jelen dolgozat tárgya a $C_{\mathrm{I}}^{(4)}$ nevezetes pontcsoportjainak vizsgálata. Mielőtt e vizsgálathoz foghatnánk, előre kell bocsátanunk azokat, a $C_{\mathrm{I}}^{(4)}$ elméletében alapvető tételeket, a melyek részben a

---

* A 2 másodrendű felület teljes áthatását képező negyedrendű térgörbét *elsőfajúnak* mondjuk, szemben a *másodfajúnak* nevezett negyedrendű térgörbével, mely egy harmadrendű felület és egy ezen felület kettős egyenesét vagy két kitérő egyenesét magában foglaló másodrendű felület áthatása. Jellemző tulajdonsága, hogy rajta csupán ezen egy másodrendű felület fektethető keresztül (mert hisz különben 2 másodrendű felület áthatása volna); a felület egyik alkotóseregének alkotói a görbét 1—1, a másikéi 3—3 pontban metszik.

** A konfigurácziók módosulását illetőleg kettős vagy visszatérő ponttal biró vagy széteső görbe esetén utalunk DISTELI munkájára: Die Steiner'schen Schliessungsprobleme etc. Mégis szükségesnek tartjuk itt hangsúlyozni, hogy a következőkben a $C_{\mathrm{I}}^{(4)}$-re adandó tételek nem kizárólagosan ezen görbére, hanem egészben vagy bizonyos módosulásokkal a tárgyalásból kizárt degenerált alakokra is állanak.

görbén átmenő másodrendű felületek sorára, részben a görbének valamely másodrendű felülettel való metszésére vonatkoznak és a melyek helyzetgeometriai bebizonyitását egyes kézikönyvekben, illetőleg monografiákban megtalálhatjuk.* Itt csak e tételek felsorolására szorítkozom.

A $C_{\mathrm{I}}^{(4)}$-*en a és tér egy tetszésszerinti a görbén kívül fekvő* **P** *pontján át egy és csak egy másodrendű felület fektethető. A felület minden alkotója a görbét két pontban metszi: a görbének húrja, biszekánsa.* **P** ponton át a görbéhez vonható két biszekáns a felület két **P**-n átmenő alkotója.

A $C_{\mathrm{I}}^{(4)}$-*en és egy tetszésszerinti biszekánsán át egy és csak egy másodrendű felület fektethető.* A biszekánson mint sorozón át fektetett síksor minden síkja a $C_{\mathrm{I}}^{(4)}$-et még két pontban metszi; e pontok összekötő egyenesei képezik a felület egyik alkotóseregét, míg az adott biszekáns a másik alkotósereghez tartozik.

A görbe érintője a biszekáns határhelyzete. *A görbén átmenő másodrendű felületek sokasága egy-dimenziós és négy kúpfelületet tartalmaz; az ezek csúcsai által alkotott tetraéder a sor minden felületének polár-tetraéderje.*** Ezt a tetraédert a felületsor, vagy az általa jellemzett $C_{\mathrm{I}}^{(4)}$ *polártetraéderjének* mondjuk és mint ilyennek jellemző tulajdonsága, hogy *bármelyik csúcsa a szemben fekvő lappal, mint a kollineáczió czentruma és síkja olyan involutorikus czentrális kollineácziót határoznak meg, a mely a* $C_{\mathrm{I}}^{(4)}$-*et önönmagába transzformálja.*

---

* Reye: Geometrie der Lage II.; Schroeter: Theorie der Oberflächen zweiter Ordnung etc.; Schroeter: Theorie der Raumkurve 4. O. etc.; Rohn u. Papperitz: Darstellende Geometrie II.

** E tétel segítségével a feladatot, 7 ponthoz egy nyolczadikat keresni, mely az adott 7 ponttal együtt Reye-féle csoportot alkosson, visszavezethetjük a biszekáns szerkesztésére adott ponton át a 6 pontjából meghatározott harmadrendű térgörbéhez, mely szerkesztés tudvalevőleg tisztán vonalzó segítségével végezhető. A 8-ik pont egy másik szerkesztésére (Duporcq, Revue de Math. spéc. 1892) vezet a 8 pont azon tulajdonsága, hogy négyesével 2 oly tetraéder csúcsait képezik, mely ugyanazon másodrendű felületre nézve konjugált (Hesse, Crelle's J. 1843, S. 147.). A 8 pont problemájával még az említetteken kívül Serret, Picquet, Zeuthen, Reye, Schroeter, Caspary stb. foglalkoztak.

A tér nyolcz tetszés szerinti pontján át, mely közül öt nem fekszik egy síkban és három nem egy egyenesben, általában egy és csak egy negyedrendű elsőfajú térgörbe, vagy ennek egy harmadrendű térgörbébe és egy biszekánsába degenerált alakja fektethető. Ha a nyolcz pont olyan helyzetű, hogy egynél több $C_{\mathrm{I}}^{(4)}$-en feküsznek, akkor e pontokon át a másodrendű felületeknek egy két-dimenziós, a negyedrendű elsőfajú térgörbéknek egy egy-dimenziós sokasága fektethető. Az ilyen 8 pont összességét *8 asszocziált pont csoportjának*, vagy REYE-*féle csoportnak* nevezzük. Jellemző tulajdonsága, hogy *két pontját összekötő egyenes a másik 6 ponttal meghatározott harmadrendű térgörbe biszekánsa.*

Három másodrendű felület, melynek közös görbéje nincsen, egymást egy REYE-féle csoport 8 pontjában metszi. Ebből következik, hogy *egy másodrendű felület egy $C_{\mathrm{I}}^{(4)}$-et* vagy két ugyanazon F^2-n fekvő $C_{\mathrm{I}}^{(4)}$ egymást ugyancsak *egy* REYE-*féle csoport pontjaiban metszik.*

A tér hét tetszésszerinti pontja általában egy nyolczadikat határoz meg, mely az első héttel REYE-féle csoportot alkot. Ha a 7 pont közül 3 egy egyenesen, 5 egy kúpszeleten, vagy mind a 7 egy harmadrendű térgörbén fekszik, akkor ezen első-, másod- vagy harmadrendű görbék bármely pontját tekinthetjük a 7 pont által (tökéletlenül) meghatározott nyolczadik pontnak.

*

A $C_{\mathrm{I}}^{(4)}$-en átmenő F^2-sor minden felülete két alkotórendszerében a görbe két oly húrrendszerét szolgáltatja, melynek jellemző tulajdonsága, hogy az egyik rendszer minden egyes húrja metszi a másik rendszer minden egyes húrját; két ilyen húrrendszert megfelelőnek (konjugált) mondunk. Konjugáltaknak mondjuk a konjugált rendszerekhez tartozó húrokat is ;* két íly húr egymást vagy a görbén kívül metszi, vagy a görbén ; az utóbbi

* Itt és a következőkben arra az álláspontra helyezkedünk, mely az általánosítás útján a helyzetgeometriába bevezetett képzetes elemeket a valós elemekkel egy kategóriába sorozza és a mely álláspontról minden másodrendű felületet vonalfelületnek tekinthetünk.

esetben, úgy mint az elsőben, a két húr négy végpontja síknégyszöget képez; az utóbbi esetben tehát a két húron átfektetett sík a görbét a két húr közös pontjában érinti.

Egy tetszés szerinti síknak a görbével való négy metszéspontja négyszöget határoz meg, a melynek három pár szemben fekvő oldala a görbének három konjugált húrpárja. Ha a két metszéspont összeesik, vagyis ha a sík a görbét érinti, az egyik pár oldal az érintőbe és egy hozzá konjugált húrba megy át; a másik két pár összeesik és két egymást a görbén metsző konjugált húrt szolgáltat. Három összeeső metszéspont esetén a sík *simuló sík*, a négyszögnek mind a három pár oldala összeesik és egy érintőt és az érintési pontján átmenő konjugált húrt, e pont *simuló sugarát* szolgáltatja. Viszont a görbe egy tetszésszerinti érintőjén és az érintési pont simuló-sugarán át fektetett sík simuló sík, mert a görbével való metszéspontjai közül három összeesik. A simulósúgár másik végpontja, vagyis a simuló síknak a görbével való metszéspontja az érintési pont *simuló pontja*.

*

Valamely másodrendű felület, mely a $C_{\mathrm{I}}^{(4)}$-et nem tartalmazza, azt egy Reye-féle csoport nyolcz pontjában metszi. Jelöljük a metszéspontokat $A_1, A_2, .., A_8$-czal. Fektessünk az $A_1, A_2, ... A_6$ pontokon át egy másik másodrendű felületet, a mely a görbét még a B_7, B_8 pontokban metszi. Az A_7A_8 és B_7B_8 egyenesek az $A_1, A_2, ... A_6$ pontoktól meghatározott harmadrendű térgörbe biszekánsai; a görbe és e két biszekánsa által meghatározott másodrendű felületen fekszik a $C_{\mathrm{I}}^{(4)}$ 10 pontja, tehát maga a $C_{\mathrm{I}}^{(4)}$ is. A_7A_8 és B_7B_8 e felületnek ugyanazon sereghez tartozó alkotói és így a $C_{\mathrm{I}}^{(4)}$ ugyanazon húrrendszeréhez tartoznak. Vagyis *ha a $C_{\mathrm{I}}^{(4)}$-en fekvő két* Reye-*féle csoportnak hat pontja közös, akkor a különböző két-két pontot összekötő húrok egy ugyanazon húrrendszerhez tartoznak.*

Két oly Reye-féle csoport összefüggésének vizsgálatát, melynek öt pontjuk közös, az előbbire vezethetjük vissza egy harmadik csoport közbeiktatása által, melynek mindkét csoporttal 6—6 pontja közös. Ha ugyanis $A_1, A_2, \dots A_8$ és $A_1, A_2, \dots A_5, B_6, B_7, B_8$ a két csoport és C_8 azon pont, mely az $A_1, A_2 \dots A_6, B_7$ pontokat REYE-féle csoporttá egésziti ki, akkor az előző tétel értelmében az A_7A_8 és B_7C_8 húrok egy húrrendszerhez tartoznak, hasonlókép egy húrrendszerhez tartoznak a B_6B_8 és A_6C_8 húrok. Messe az $[A_6A_7A_8]$ sík a görbét a D pontban, vagy más szóval legyen D az $A_6A_7A_8$ háromszög *kisérőpontja,** akkor az A_7A_8 és A_6D húrok konjugáltak, konjugáltak tehát a B_7C_8 és A_6D húrok is: $A_6B_7C_8D$ síknégyszög; ennélfogva az A_6C_8 és B_7D és így a B_6B_8 és B_7D húrok is konjugáltak: a B_6, B_7, B_8 és D pontok egy síkban feküsznek és így D a $B_6B_7B_8$ háromszögnek is kisérő pontja. Tehát:

Ha két REYE-*féle csoportnak öt pontja közös, akkor a különböző három-három ponton át fektetett síkok a $C_I^{(4)}$-et ugyanazon negyedik pontban metszik.*

A REYE-féle pontcsoportnak 7 pontjából való meghatározottságából következik az előző tételek megfordithatósága:

Ha két 8—8 pontból álló csoport közül az egyik REYE-*féle és a két csoportnak 6 pontja közös, míg a másik két pár összekötő húrjai egy húrrendszerhez tartoznak, vagy a két csoportnak 5 pontja közös és a másik 3—3 ponton átfektetett síkok a görbét ugyanazon negyedik pontban metszik, úgy a második csoport is* REYE-*féle.*

Ha két REYE-*féle pontcsoport közül az egyiknek 6 pontja a másiknak 2 pontjával* REYE-*féle csoportot alkot, akkor* REYE-*féle csoportot alkot a többi 8 pont is.* Mert ha $A_1, A_2, \dots A_8$ és $B_1, B_2, \dots B_8$ a két csoport és $A_1, \dots A_6, B_7, B_8$ is REYE-féle csoport, akkor az A_7A_8 és B_7B_8 húrok egy húrrendszerhez tartoznak és így REYE-féle a $B_1, \dots B_6, A_7, A_8$ csoport is. Hasonlóan mutatható ki az analog tétel az 5—3-as csoportositás esetében. Ha végre a 4—4-es csoportositás esetére is kimutathatjuk az analog tételt, akkor általában kimondhatjuk: *Ha két* REYE-*féle csoportból kiválasztható 8 olyan pont, a mely* REYE-*féle csoportot alkot, akkor ugyanilyen csoportot alkot a fönmaradó 8 pont is.*

---

* A kisérőpont egy lineáris szerkesztését l. PICQUET-nél (Crelle's J. B. 99.).

De ha $A_1, \dots A_8$ $B_1, \dots B_8$ és egyszersmind $A_5, \dots, A_8$, $B_1, \dots B_4$ REYE-féle csoportok és az $A_5A_6A_7$ háromszög kisérő pontja C_8 és a $B_6B_7C_8$ háromszögé D_5, akkor REYE-féle csoport $A_1, A_2, A_3, A_4, D_5, B_6, B_7, A_8$ is, mert az A_5, A_6, A_7 és D_5, B_6, B_7 háromszögek C_8 kisérőpontja közös; hasonló okból REYE-féle csoportot képeznek a $B_1, \dots B_4, D_5, B_6, B_7, A_8$ pontok és így D_5A_8 és B_5B_8 húrok egy húrrendszerhez tartoznak; ennélfogva az $A_1, A_2, A_3, A_4, B_6, B_7$ pontok, melyek a D_5 és A_8 pontokkal REYE-féle csoportot alkotnak, hasonló csoportot képeznek B_5 és B_8 pontokkal, vagyis az $A_1, \dots A_4, B_5, \dots B_8$ pontcsoport is csakugyan REYE-féle.

Az imént adott tétel speczialis esete a következő:

Ha az $A_1, A_2, A_3, A_4, B_1, B_2, B_3, B_4, C_1, C_2, C_3, C_4$ *pontok 3 síknak a görbével való metszéspontjai, akkor az* $[A_1, B_1, C_1]$, $[A_2, B_2, C_2]$, $[A_3, B_3, C_3]$ és $[A_4, B_4, C_4]$ *síkoknak a görbével való* D_1, D_2, D_3, D_4 *metszéspontjai is egy síkban feküsznek.*

Ez a 16 pont ugyanis, mint négy síknak egy görbével való metszéspontjai, 2 REYE-féle csoport összessége és így mivel az [A] és [B] síkoknak a görbével való metszéspontjai REYE-féle csoportot képeznek, REYE-féle a (C_i, D_i) csoport is; de a C pontok egy síkban feküsznek és így egy síkba esnek a D pontok is.

E tétel egy speczialis esete:

*A görbe 4 egy síkban fekvő pontjának simuló pontjai is egy síkban feküsznek.**

*

*A görbe minden húrrendszerre a görbe pontjai közt involutorikus megfelelést létesít olykép, hogy a rendszer húrjai a görbét az involuczió pontpárjaiban metszik.*** Ily módon a $C_I^{(4)}$-en a

* A REYE-féle pontcsoportra vonatkozó tételeket REYE adta az Ann. di mat. Ser. II. második kötetében (122. és 129. l. Sopra le curve storte di quart'ordine stb.).

** A térnek egy involutorikus transzformáczióját, a mely a görbén a fent vázolt megfelelést létesíti, a $C_I^{(4)}$-en átmenő F^2-sor és két ugyanazon rendszerhez tartozó g_1 és g_2 húr segítségével következőkép definiáljuk: Két pont egymásnak megfelel, ha 1. az F^2-sor ugyanazon felületén fekszik, mely azonban a g_1 és g_2 egyeneseket nem tartalmazza, 2. a 2 pontot össze-

hiperboloidikus projicziálást vagy röviden projicziálást úgy definiáljuk, hogy az *a görbe pontjainak vetítése a görbére egy húrrendszer húrjai által.* A húrrendszert, illetőleg húrjait *vetítőknek*, projicziálóknak mondjuk. Ezzel a húrrendszerrel, a melylyel projicziálunk, szembe kell állítanunk a konjugált húrrendszert, mint a melyből projicziálunk, mert az utóbbi húrrendszer húrjait a görbe pontjaival összekötő síkok metszik ki a görbén az illető pontok projekczióit; vagyis ez a húrrendszer veszi itt át a projekczió czentrumának szerepét. *Két projicziálást, melyet konjugált húrrendszerek indukálnak, ugyancsak konjugáltaknak mondunk.*

A négy önönmagával konjugált, kúpos húrrendszer által létesített projicziálások középpontiak és önmagukkal konjugáltak.

Projicziálja két húrrendszer az A_1A_2 pontpárt a B_1B_2 és C_1C_2 pontpárokba. Legyen P_1P_2 egy az első, Q_1Q_2 egy a második rendszerhez konjugált húr, úgy $P_1P_2A_1B_1$, $P_1P_2A_2B_2$, $Q_1Q_2A_1C_1$, $Q_1Q_2A_2C_2$ síknégyszögek és így a P_1, P_2, A_1, B_1, Q_1, Q_2, A_2, C_2 és a P_1, P_2, A_2, B_2, Q_1, Q_2, A_1, C_1 pontcsoportok REYE-félék; a két csoportnak 6 pontja közös: a fönmaradó B_1C_2 és B_2C_1 pontpárokat összekötő húrok egy húrrendszerhez tartoznak: B_1B_2 és C_2C_1 pontpárok egymás projekcziói, vagy röviden: a két pontpár *perspektiv.* Ezzel a $C_I^{(4)}$ elméletének egy *alapvető tételét* nyertük:

Ha A_1A_2 *és* B_1B_2, A_1A_2 *és* C_1C_2 *perspektivek, akkor perspektivek* B_1B_2 *és* C_2C_1 *is.*

E tételből azonnal következik:

Ha két sokszög $A_1 \dots A_n$ *és* $B_1 \dots B_n$ *perspektiv, és* $A_1 \dots A_n$ *egy projekcziója* $A_1' \dots A_n'$, $B_1 \dots B_n$ *egy projekcziója* $B_1' \dots B_n'$, *úgy az* $A_1' \dots A_n'$ *és* $B_1' \dots B_n'$ *sokszögek is perspektivek.*

Mert A_1A_2 perspektiv lévén B_1B_2-vel és $A_1'A_2'$-vel, perspektivek B_1B_2 és $A_2'A_1'$ is; de mivel még B_1B_2 és $B_1'B_2'$ is perspektivek,

kötő egyenes metszi a g_1 és g_2 egyeneseket. A g_1 és g_2 egyeneseken átmenő 2-r. felület pontjainak megfelelését külön definiáljuk olykép, hogy a g_1 és g_2 húrokat metsző alkotósereg alkotóinak pontjai páronkint felelnek meg úgy, hogy az egyes húroknak a $C_I^{(4)}$-gyel való metszéspontjai megfelelő párok, míg a többi pontok megfelelése teljesen tetszésszerinti.

perspektivek $A'_1A'_2$ és $B'_1B'_2$; hasonlókép perspektivek $A'_1A'_3$ és $B'_1B'_3$s. i. t.; vagyis az A'_1-t B'_1-ba átvivő projicziálás A'_2-t B'_2-ba, általában A'_k-t B'_k-ba projicziálja: az $A'_1 \dots A'_n$ és $B'_1 \dots B'_n$ sokszögek tehát perspektivek.

Ha az A_1A_2 *és* B_1B_2 *pontpárok 2-szeresen perspektivek,* vagyis A_1A_2 perspektiv B_1B_2-vel és B_2B_1-gyel is, *úgy* B_1B_2 *perspektiv* B_1B_2-*vel,* vagyis *a* B_1 *és* B_2 *pontokban vont érintők egy húrrendszerhez tartoznak.* Az ilyen tulajdonsággal biró B_1B_2 pontpárt *megfelelő pontpárnak* nevezzük. Hasonló okból *megfelelő az* A_1A_2 *pontpár is.* Általában, mint az az imént perspektiv sokszögekre adott tételből következik, *egy önönmagával perspektiv pontpár bármely projekcziója is önönmagával perspektiv. Bármely megfelelő pontpárból tehát az összes projicziálások által a megfelelő pontpárok egy hálózata származtatható, mely hálózat párjai egymással kétszeresen perspektivek.* Mint később, a pontquadruplumok tárgyalásánál látni fogjuk, a görbén összesen 3 ilyen hálózat létezik; két különböző hálózat egy-egy párja nem perspektiv.

Többszörösen perspektiv háromszögek; *n*-ászok.

A görbén fellépő konfiguráczióknak legközvetetlenebb tipusát a többszörösen perspektiv sokszögek szolgáltatják.

Arra a kérdésre, vajjon vannak-e a görbén kétszeresen perspektiv kétszögek, az igenlő választ a perspektiv megfelelő pontpárok adták. A legközelebbi kérdés, vajjon léteznek-e többszörösen perspektiv háromszögek és ha igen, hányszorosan és minő különböző elrendezésekben perspektivek?

Legyen $A_1A_2A_3$ és $B_1B_2B_3$ két perspektiv háromszög, kérdés először is, hogy $B_1B_2B_3$ többi öt elrendezése közül melyekben lehet még $A_1A_2A_3$-mal perspektiv?

Azonnal világos, hogy a páratlan rendű permutácziók által nyertek, vagyis azok, melyekben csak két pont cserél helyet, nem lehetnek perspektivek. Föltéve ugyanis, hogy pl. $A_1A_2A_3$ és $B_1B_3B_2$ is perspektivek volnának, az A_2B_2 és A_2B_3 húroknak ugyanazon, az A_1B_1 húr meghatározta húrrendszerhez kellene tartozniok, vagyis egybeesnének, a mi a B_2 és B_3 pontok egybeesését vonná maga után, ez pedig a fölvetett problema elejtésével visszavezetne a kétszeresen perspektiv kétszögek konfigurácziójához.

Fönmaradnak tehát a cziklikus permutácziók révén nyert elrendezések, szám szerint három. Első sorban belátható itt az a körülmény, hogy *a kétszeres perspektivitás maga után vonja a háromszorosat.* Ha ugyanis $A_1A_2A_3$ perspektiv $B_1B_2B_3$-mal és $B_2B_3B_1$-gyel, akkor B_1B_2 és B_3B_2 is perspektivek, de B_3B_2-vel perspektiv még A_3A_2, perspektivek tehát A_2A_3 és B_1B_2. Analog módon kimutatható, hogy A_1A_2 B_3B_1-gyel perspektiv; perspektivek tehát az $A_1A_2A_3$ és $B_3B_1B_2$ háromszögek is.

Világos továbbá, hogy a B_1B_2-vel perspektiv A_1A_2, A_2A_3 és A_3A_1 pontpárok egymás közt is perspektivek olykép, hogy mindegyik pontpár perspektiv a másik két pontpár transzpoziczióival.* E szerint A_iA_j és A_iA_k perspektivek lévén, A_iA_i és A_jA_k ugyanahhoz a húrrendszerhez tartoznak. *Az $A_1A_2A_3$ háromszög tehát háromszorosan perspektiv önönmagával olykép, hogy bármely oldala és az átellenes csúcsban a $C_I^{(4)}$-hez vont érintő egy húrrendszerhez tartoznak,* a miből egyszersmind következik, hogy az A_i pont simuló pontja egyszersmind projekcziója az A_jA_k húrból vagyis az $A_iA_jA_k$ háromszög kisérőpontja; e szerint az A_1, A_2, A_3 *pontok simulópontja közös és azonos az $A_1A_2A_3$ háromszög kisérőpontjával.*

Az előző levezetés és ezzel az előző tétel is megfordítható: *Ha az $A_1A_2A_3$ háromszög oly tulajdonságú, hogy szögpontjainak simulópontja közös és azonos a háromszög kisérő pontjával, akkor a háromszög önönmagával és bármely projekcziójával háromszorosan perspektiv.*

Az ilyen, önönmagával háromszorosan perspektiv háromszöget *triásznak*** nevezzük.

---

* A következőkben rövidseg okáért többször használt kifejezés: perspektiv a pontok valamely permutácziójával, úgy értendő: perspektiv egy sokszöggel, melyet a pontok az ilyen meg ilyen permutáczióval nyert elrendezésben alkotnak.

** Megfontolásainkban hallgatólag feltételeztük, hogy léteznek a görbén

Ha P *a görbe egy tetszésszerinti pontja és* $A_1A_2A_3$ *egy triász úgy a* PA_1A_2, PA_2A_3, PA_3A_1 *háromszögek kisérőpontjai szintén triászt alkotnak,* mert e pontok az A_1, A_2, A_3 pontok projekcziói a PA_i húrok bármelyikéből; a mi azonnal világos, ha tekintetbe veszszük, hogy a PA_iA_i és PA_jA_k háromszögek kisérőpontja közös.

*

A föntebbi tárgyalás szinte rámutat a problema általánositására, mely teljesen hasonló módon, csak egyes következtetések ismétlésével végezve, az n-szeresen perspektiv sokszögek egyik alaptipusára, az n-ászra vezet. *n-ászt képeznek az olyan $C_{\mathrm{I}}^{(4)}$-be írt n-szögek, melyek bármely projekcziójuknak összes cziklikus permutáczióival perspektivek. Az ilyen n-szögek önönmagukkal is perspektivek olykép, hogy* $A_1A_2 \ldots A_n$ *az* $A_n \ldots A_2A_1$ *bármely cziklikus permutácziójával perspektiv.* Viszont, *az önönmagukkal*

---

egymással 2-szeresen perspektiv háromszögek, vagy a mi megfontolásaink után ezzel azonos, hogy léteznek a görbén önönmagukkal 3-szorosan perspektiv háromszögek: triászok. Az existencziа bebizonyítása e fokon, csupán a föltételezett előismeretek segítségével alig lehetséges. Különben e létezés szorosan összefügg az inflexiós pontok létezésével a $C_{\mathrm{I}}^{(4)}$ egy pontjából való vetületén, a 3-r. 6-o. síkgörbén. Mivel a síkgörbe inflexiós pontjai oly pontok vetületei, melyekben a projekczióczentrumon át fektetett simuló síkok a $C_{\mathrm{I}}^{(4)}$-et érintik és viszont minden ilyen pont vetülete inflexiós pont, azért a síkgörbe 9 inflexiós pontjának megfelelően a $C_{\mathrm{I}}^{(4)}$ egy pontjából 9 simulósík fektethető; ezek közül csak 3 valós. Minthogy a síkgörbe inflexiós pontjai közül 3—3 12-félekép fekszik egy-egy egyenesen, a 9 simulósík érintési pontjaiból 12-félekép választható ki triász; a valós pontok együtt triászt alkotnak.

Mivel egy inflexiós ponton át 4 inflexiós egyenes fektethető, a $C_{\mathrm{I}}^{(4)}$ egy tetszésszerinti pontja 4 triászhoz tartozik; e négyféle triászból projicziálás által minden triász leszármaztatható. A triászok ilykép 4 hálózatot alkotnak, melyek közül azonban csak egyik valós.

A görbe egy valós pontja e szerint csak egy valós triászhoz tartozik.

Két valós triász, melyről tudjuk, hogy milyen elrendezésben perspektivek, meghatározza a görbét, mint a projicziáló hiperboloidok közös görbéjét.

Mindeme reálitási meggondolásokban természetesen hallgatólag föltettük, hogy a görbe valós, mi a vizsgálat többi részében nem jött tekintetbe.

ilyen módon n-szeresen perspektiv n-szögek minden projekcziójukkal n-szeresen perspektivek.

A bebizonyitás menete teljesen hasonló az előbbihez, az első lépés ismét annak a kimutatása, hogy bizonyos föltételek mellett (a háromszögnél ezek a föltételek mindig ki vannak elégítve) a kétszeres perspektivitásból következik az n-szeres. Legyen ugyanis $A_1A_2 \ldots A_n$ a $B_1B_2 \ldots B_n$ és $B_{[1+k]}B_{[2+k]} \ldots B_{[n+k]}$ elrendezésekkel perspektiv, hol $[l]$-lel azon n-nél kisebb vagy vele egyenlő pozitiv számot jelöljük, melyre $l \equiv [l]$ (mod. n), úgy B_iB_j és $B_{[j+k]}$ $B_{[i+k]}$ perspektivek, perspektivek továbbá B_iB_j és $A_{[i-k]}$ $A_{[j-k]}$, tehát egyszersmind $A_{[i-k]}A_{[j-k]}$ és $B_{[i+k]}$ $B_{[j+k]}$ is. Az $A_1A_2 \ldots A_n$ és $B_{[1+2k]}B_{[2+2k]} \ldots B_{[n+2k]}$ sokszögek e szerint perspektivek. Folytatólagosan perspektivek tehát általában $A_1A_2 \ldots A_n$ és $B_{[1+mk]}$ $B_{[2+mk]} \ldots B_{[n+mk]}$, hol m egy tetszésszerinti egész szám. $A_1A_2 \ldots A_n$ és $B_1B_2 \ldots B_n$ összes cziklikus permutáczióinak perspektiv fekvése ebből akkor és csak akkor következik, ha $1+mk$ az összes mod. n inkongruens értékeket fölveszi, vagyis, ha n és k relativ primszámok.

Specialiter az $A_1 \ldots A_n$ sokszögek a $B_1 \ldots B_n$ sokszög két egymásra következő cziklikus permutácziójával való perspektivitásából mindig következik az n-szeres perspektivitás. Másrészt ha n törzsszám, ugy az $A_1 \ldots A_n$ sokszögnek a $B_1 \ldots B_n$ sokszög bármely két különböző cziklikus permutácziójával való perspektivitásából az n-szeres perspektivitásra következtethetünk.

Itt ismét világos, hogy a B_1B_2-vel perspektiv A_1A_2, $A_2A_3, \ldots$, A_nA_1 pontpárok is perspektivek oly elrendezésben, hogy A_iA_j-nek $A_{[j+k]}A_{[i+k]}$ felel meg; e szerint *az $A_1 \ldots A_n$ n-ász önönmagával is n-szeresen perspektiv olykép, hogy $A_1A_2 \ldots A_n$-nel $A_nA_{n-1} \ldots A_1$ összes cziklikus permutácziói perspektivek.* E szerint az n-ász oldalai és átlói csoportonként egy-egy húrrendszer húrjai oly módon, hogy az A_iA_j és $A_{[i-k]}A_{[j+k]}$ húrok egy húrrendszerhez tartoznak.

Az n-ászt mint minden projekcziójával meghatározott módon n-szeresen perspektiv sokszöget definiáltuk. Az eddigiekben vizsgált $A_1A_2 \ldots A_n$ n szögről csak azt tettük föl, hogy egy bizonyos projekcziójával perspektiv n-szeresen az előírt módon és bebizonyitottuk róla, hogy önönmagával is n-szeresen perspektiv. Hogy az $A_1A_2\dots A_n$ n-szög a definiczió értelmében n-ász, az még igazolásra szorul. De A_iA_j egyidejüleg perspektiv $A_{[j+k]}A_{[i+k]}$-val és C_iC_j-vel, hol $C_1C_2\dots C_n$ az $A_1A_2\dots A_n$ egy tetszésszerinti projekcziója; perspektivek tehát $A_{[i+k]}A_{[j+k]}$ és C_iC_j; vagyis az $A_1A_2\dots A_n$ n-szög bármely projekcziójával az előírt módon n-szeresen perspektiv.

Az előző tétel segitségével bebizonyitható az a tétel, hogy *az n-ász pontjainak simuló pontjai ismét n-ászt alkotnak, hacsak n nem osztható 3-mal.* Az A_i pont simuló pontja vagyis projekcziója érintőjéből projekcziója az $A_nA_{[2i]}$ húrból, vagy egyszersmind A_n projekcziója $A_iA_{[2i]}$-ből, tehát $A_nA_{[3i]}$-ből is, tehát egyszersmind $A_{[3i]}$ projekcziója az A_n pontban vont érintőből. Ha n nem osztható 3-mal, úgy mialatt i az $1, 2, \dots, n$ számok sorozatát befutja, $[3i]$ is fölveszi bizonyos sorrendben az $1, 2, \dots$ n értékeket, az $A_{[3i]}$ pontok tehát az $A_1A_2\dots A_n$ n-ászt alkotják, mely, mint könnyen belátható, az $A_1A_4A_{[7]}\dots$ elrendezésében is n-ász. A simuló pontok által alkotott n-szög tehát, mint ezen n-ász vetülete az A_n ponthoz tartozó érintőből, szintén n-ász.

Abban az esetben, midőn n osztható 3-mal, $[3i]$ is osztható 3-mal, $A_{[3i]}$ tehát háromszor jut az $A_3, A_6, \dots, A_n$ helyzetek mindegyikébe: az A_i, $A_{\left[i+\frac{n}{3}\right]}$, $A_{\left[i+2\frac{n}{3}\right]}, \dots$ pontok simulópontja közös. Legyen $n=3k$; úgy ha A_i^*-vel jelöljük az A_i pont simulópontját, az $A_1^*, A_4^*, \dots, A_{n-2}^*$ pontok k-ászt alkotnak. Mert az $A_1^*A_2^*\dots A_k^*$ k-szög perspektiv az $A_1A_4\dots A_{n-2}$ és $A_2A_5\dots A_{n-1}$ k-szögekkel, ezek pedig inverz elrendezésben egymással, tehát $A_1^*A_2^*\dots A_k^*$ is perspektiv $A_k^*A_{k-1}^*\dots A_1^*$-gyel. De egyszersmind $A_1^*A_2^*\dots A_k^*$ perspektiv $A_1A_4\dots A_{n-2}$-vel és $A_1A_4\dots A_{n-2}$ $A_1A_{n-2}\dots A_{[7]}A_4$-gyel, ennélfogva $A_1^*A_2^*\dots A_k^*$ és $A_1^*A_k^*A_{k-1}^*\dots A_2^*$ is perspektivek; $A_1^*A_2^*\dots A_k^*$ tehát perspektiv inverz elrendezésének két egymásra következő cziklikus permutácziójával és igy k-ász.

Hasonlókép k-ászok az $A_iA_{[i+3]}\dots A_{[i+n.3]}$ k-szögek mint $A_1^*\dots A_k^*$ projekcziói.

Fölmerülhet itt még a kérdés, hányféleképp bontható fel egy n-ász k-ászokra, ha $n=3k$. De már a föntebbi problema tárgyalása rámutatván az általánosabb problemára: az n-ászoknak k-ászokra való bontására, ha k n-nek osztója, jobbnak látom az utolsó kérdést már teljes általánosságban tárgyalni.

Mi tehát a föltétele annak, hogy az $A_1A_2\dots A_n$ n-ász pontjai közül kiválasztott k pont: $A_{i_1}, A_{i_2}, \dots, A_{i_k}$ az adott sorrendben k-ászt alkosson? A felelet egyszerű. Kell, hogy $A_{i_1}\dots A_{i_k}$ inverz elrendezésének összes cziklikus permutáczióival perspektiv legyen, vagyis hogy az $A_{i_g}A_{i_k}$ és $A_{i_j}A_{i_l}$ húrok akkor és csak akkor tartozzanak egy húrrendszerhez, ha $i_g+i_h\equiv i_j+i_l \pmod{k}$.

Másrészt az A_i-k egy n-ász pontjai lévén, az $A_{i_g}A_{i_h}$ és $A_{i_j}A_{i_l}$ húrok akkor és csak akkor tartoznak egy húrrendszerhez, ha $i_g+i_h\equiv i_j+i_l \pmod{n}$. De az utóbbi feltétel kielégítésével eleget tettünk az elsőnek is. A szükséges és elegendő feltétel tehát, hogy az $A_{i_1}, A_{i_2}, \dots, A_{i_k}$ pontokat úgy válaszszuk ki az $A_1A_2\dots A_n$ n-ász pontjai közül, hogy $[i_{j+1}-i_j]$ j minden értékénél ugyanaz legyen; a mit úgy érhetünk el, ha az $A_1\dots A_n$ pontok valamely n-ászt képező elrendezéséből minden $r\frac{n}{k}$-adik pontot kiválaszszunk, hol r olyan tulajdonságú szám, hogy $h\,.\,r\frac{n}{k}$ nem osztható n-nel, hacsak h k-nál kisebb pozitiv egész szám. Vagyis hr nem osztható k-val; r tehát k-val relativ prim.

A mod. n inkongruens $r\frac{n}{k}$ számoknak a mod. k inkongruens r számok felelvén meg, összesen $\varphi(k)$ ugyanazon pontból kiinduló k-ászt választhatunk ki. Ha csak azon k-ászokat tekintjük lényegileg különbözőknek, melyek nem képezhetők egymásból megfordítás, cziklikus permutáczió vagy ezek összetétele által, úgy azon $n\,.\,\varphi(k)$ k-ász közül, melyet n különböző pontból indulva ki. nyerünk, $2k$—$2k$ lényegileg megegyezik: *az n-ászból kiválasztható lényegesen különböző k-ászok száma tehát* $\frac{n\varphi(k)}{2k}$.

Riesz Frigyes.

EGY KÖZÉPÉRTÉK.

Ha a és b két pozitiv szám és pl.: $a>b$, akkor, miként ismeretes, az

$$a, a_1, a_2, \ldots, a_i \ldots$$
$$b, b_1, b_2, \ldots, b_i \ldots$$

sorozatok, a hol

$$a_i = \sqrt{a_{i-1}b_{i-1}}; \quad b_i = \frac{a_i+b_{i-1}}{2} \tag{1}$$

szabályosak és közös határértékük van, melyet $L(a, b)$-vel jelölünk.*

A következő sorokban e határérték explicit alakját állitjuk elő a cziklometrikus függvények segitségével, éppen úgy, mint a tulajdonképpeni (Gauss-féle) arithmetikai-geometriai közép az elliptikus integrálok által állíttatik elő.

1. E végből először megmutatjuk, hogy ha

$$0 < \alpha \leqq \frac{\pi}{2},$$

$$L\left(\frac{2}{\sin\alpha}, \operatorname{cotg}\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{2}{\alpha}.$$

Ha ugyanis:

$$a = \frac{2}{\sin\alpha}; \quad b = \operatorname{cotg}\frac{\alpha}{2},$$

akkor 1) szerint

$$a_1 = \sqrt{ab} = \frac{1}{\sin\frac{\alpha}{2}}; \quad b_1 = \frac{1}{2}\operatorname{cotg}\frac{\alpha}{4}$$

---

* L. pl. König: Analizis, p. 117.

$$a_2 = \frac{1}{2\sin\frac{\alpha}{4}}; \quad b_2 = \frac{1}{4}\operatorname{cotg}\frac{\alpha}{8}$$

. . . .

$$a_i = \frac{1}{2^{i-1}\sin\frac{\alpha}{2^i}}; \quad b_i = \frac{1}{2^i}\operatorname{cotg}\frac{\alpha}{2^{i+1}}$$

és a közös határérték:

$$\lim a_n = \lim b_n = \lim \frac{1}{2^{n-1}\sin\frac{\alpha}{2^n}} = \frac{2}{\alpha};$$

2. Azonnal belátható, hogy:

$$L(\rho A, \rho B) = \rho L(A, B).$$

Ha már most $L(a, b)$ kerestetik, akkor ρ-t és α-t úgy kell meghatároznunk, hogy:

$$a = \frac{2\rho}{\sin\alpha} \quad b = \rho\operatorname{cotg}\frac{\alpha}{2}$$

legyen. Ezen egyenletekből:

$$\cos\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{b}{a}} \quad \rho = \sqrt{b(a-b)},$$

tehát az előbbi megjegyzésünk szerint:

$$L(a, b) = L\left(\rho\cdot\frac{2}{\sin\alpha}, \rho\operatorname{cotg}\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{\sqrt{b(a-b)}}{\text{arc. cos.}\sqrt{\frac{b}{a}}}.$$

3. Hogy az imént talált számérték valóban az $L(a, b)$-t szolgáltatja, arról közvetlenül is meggyőződhetünk azzal, ha megmutatjuk, hogy

$$L(a, b) = \frac{\sqrt{b(a-b)}}{\text{arc. cos.}\sqrt{\frac{b}{a}}} \qquad 2)$$

valóban invarians, ha a, b helyébe a_1, b_1 tétetik.

$$a_1 = \sqrt{ab}; \quad b_1 = \frac{\sqrt{ab}+b}{2}$$

tehát a 2) alatti kifejezés nevezője lesz:

$$\text{arc. cos.} \sqrt{\frac{b_1}{a_1}} = \text{arc. cos.} \sqrt{\frac{\sqrt{ab}+b}{2\sqrt{ab}}} =$$

$$= \text{arc. cos.} \sqrt{\frac{1+\sqrt{\frac{b}{a}}}{2}} = \frac{1}{2}\,\text{arc. cos.} \sqrt{\frac{b}{a}}$$

és a 2) alatti kifelezés számlálója:

$$\sqrt{b_1(a_1-b_1)} = \sqrt{\frac{\sqrt{ab}+b}{2}\cdot\frac{\sqrt{ab}-b}{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{b(a-b)}$$

tehát valóban:

$$L(a, b) = L(a_1, b_1).$$

Beke Manó.

A SZÁMTANI HALADVÁNY ELMÉLETÉHEZ.

E lapok IV. kötetében arithmetikai uton mutattam ki, hogy az $ax-1$ számtani haladvány, ha $a=p^{\alpha}$ páratlan törzsszámhatvány, végtelen sok törzsszámot tartalmaz. A bebizonyitásban egy már Dirichlet-től megvizsgált kifejezésből indulok ki és azután a quadratikus recziproczitási tételt alkalmazom. Ugyane kérdéssel velem egyidejüleg és analog módon Daublebsky v. Sterneck úr is foglalkozott.**

A jelen czikk ugyanezt a kérdést más módon oldja meg.

A bebizonyitásban szereplő kifejezések már régen meg vannak vizsgálva; de kiemelem, hogy a tárgyalást itt *kizárólag a raczionális számok körében fog történni s azonkívül a recziproczitási tétel sincs felhasználva.*

Magától értetődik, hogy a IV. kötetben foglalt bebizonyitást is be lehet úgy rendezni, hogy az tisztán a raczionális számok körében maradjon.

*

1) Legyen p páratlan törzsszám és vezessük be a következő jelzést:

$$F(y)=\frac{y^{p^{\alpha-1}(p-1)}+y^{p^{\alpha-1}(p-2)}+\cdots+y^{p^{\alpha-1}}+1}{y^{\frac{p^{\alpha-1}(p-1)}{2}}}$$

I. *Az*

$$A_0,\ A_1,\ldots,\ A_{\frac{p^{\alpha-1}(p-1)}{2}}$$

---

* IV. kötet 331—336. o. Megragadom az alkalmat, hogy egy értelemzavaró sajtóhibát kijavítsak. A 335. old. 22. sorban $b\equiv 1$ (mod. y) helyett olv. $b\equiv 1$ (mod. 4).

** Über einige specielle zahlentheoretische Functionen. Wiener Monatshefte f. Math. Bd. VII.

raczionális egész számok egyértelműleg meghatározhatók úgy, hogy érvényes legyen a következő identitás:

$$F(y)=A_0\left(y+\frac{1}{y}\right)^{\frac{p^{\alpha-1}(p-1)}{2}}+A_1\left(y+\frac{1}{y}\right)^{\frac{p^{\alpha-1}(p-1)}{2}-1}+\cdots+A_{\frac{p^{\alpha-1}(p-1)}{2}} \quad (1)$$

Ebben az identitásban továbbá:

$$A_0=1$$

$$A_i\equiv(-1)^i\binom{\frac{p^{\alpha-1}(p-1)}{2}}{i}2^i \pmod{p} \quad (2)$$

úgy hogy:

$$\Phi(z)=z^{\frac{p^{\alpha-1}(p-1)}{2}}+A_1z^{\frac{p^{\alpha-1}(p-1)}{2}-1}+\cdots+A_{\frac{p^{\alpha-1}(p-1)}{2}}\equiv(z-2)^{\frac{p^{\alpha-1}(p-1)}{2}} \pmod{p.}$$

2) Először is az A_i számok egyértelmüen és raczionalisan meghatározhatók az:

$$A_0\left(k+\frac{1}{k}\right)^{\frac{p^{\alpha-1}(p-1)}{2}}+A_1\left(k+\frac{1}{k}\right)^{\frac{p^{\alpha-1}(p-1)}{2}-1}+\cdots=F(k) \quad (\mathrm{I})$$

$$\left(k=2,3,\ldots,\frac{p^{\alpha-1}(p-1)}{2}+2\right)$$

egyenletekből; ugyanis az (I) oly — nem homogén — lineár egyenletrendszer, melynek determinánsa nem zérus. Ugyaneme A_i értékre azonban, mint látnivaló, az:

$$A_0\left(k+\frac{1}{k}\right)^{\frac{p^{\alpha-1}(p-1)}{2}}+\cdots=F(k) \quad (3)$$

$$\left(k=\frac{1}{2},\frac{1}{3},\cdots,\frac{1}{\frac{p^{\alpha-1}(p-1)}{2}+2}\right)$$

egyenletek is fennállanak. Így tehát az A_i szóban forgó értékeire az

$$F(y),$$

$$A_0\left(y+\frac{1}{y}\right)^{\frac{p^{\alpha-1}(p-1)}{2}}+\cdots+A_{\frac{p^{\alpha-1}(p-1)}{2}}$$

kifejezések y-nak $p^{\alpha-1}(p-1)+2$ számú értékénél megegyeznek, tehát azonosan egyenlők. Egyszersmind tüstént látnivaló, hogy A_i raczionális egész szám és $A_0=1$.

3) A (2) alatti állításokat következőkép igazoljuk. Az

$$y^{p^{\alpha-1}(p-1)}+y^{p^{\alpha-1}(p-2)}+\cdots+y^{p^{\alpha-1}}+1\equiv A_0(y^2+1)^{\frac{p^{\alpha-1}(p-1)}{2}}+$$

$$+A_1y(y^2+1)^{\frac{p^{\alpha-1}(p-1)}{2}-1}+\cdots+A_{\frac{p^{\alpha-1}(p-1)}{2}}y^{\frac{p^{\alpha-1}(p-1)}{2}} \pmod{p} \quad (4)$$

azonos kongruencziából következik, hogy az azt kielégítő A_i értékek (mod. p) egyértelműen vannak meghatározva. Ha tehát a (2) értékek (4)-nek eleget tesznek, akkor ezek az egyedűliek. Ezek azonban csakugyan kielégítik (4)-et. Ugyanis:

$$y^{p^{\alpha-1}(p-1)}+y^{p^{\alpha-1}(p-2)}+\cdots+y^{p^{\alpha-1}}+1\equiv(y-1)^{p^{\alpha-1}(p-1)} \pmod{p}$$

és (2)-t behelyettesítve:

$$A_0(y^2+1)^{\frac{p^{\alpha-1}(p-1)}{2}}+A_1y(y^2+1)^{\frac{p^{\alpha-1}(p-1)}{2}}+\cdots\equiv$$

$$\equiv[(y^2+1)-2y]^{\frac{p^{\alpha-1}(p-1)}{2}}\equiv(y-1)^{p^{\alpha-1}(p-1)} \pmod{p}.$$

4. A további vizsgálat a $\Phi(z)$ kifejezéshez füződik.

II. *Ha $q \gtrless p$ tetszőleges oly törzsszám, a melyre a*

$$\Phi(z)=A_0z^{\frac{p^{\alpha-1}(p-1)}{2}}+A_1z^{\frac{p^{\alpha-1}(p-1)}{2}-1}+\cdots+A_{\frac{p^{\alpha-1}(p-1)}{2}}\equiv 0 \pmod{q} \quad (5)$$

kongruencziának van gyöke, akkor:

$$q^2\equiv 1 \pmod{p^\alpha}. \qquad (6)$$

5. Tegyük fel, hogy

$$z\equiv r \pmod{q}$$

(5)-nek gyöke, akkor:

$$\Phi(z)=(z-r)\,G(z)+qg(z)$$

a hol $G(z)$, $g(z)$ egész együtthatójú, egész kifejezések. Az előbbi identitásból kapjuk:

$$\Phi\left(y+\frac{1}{y}\right)=\frac{y^{p^{\alpha-1}(p-1)}+y^{p^{\alpha-1}(p-2)}+\cdots+y+1}{y^{\frac{p^{\alpha-1}(p-1)}{2}}}=$$

$$=\left(y-r+\frac{1}{y}\right)G\left(y+\frac{1}{y}\right)+qg\left(y+\frac{1}{y}\right)$$

vagyis

$$y^{p^{\alpha-1}(p-1)}+y^{p^{\alpha-1}(p-2)}+\cdots+y^{p^{\alpha-1}}+1\equiv(y^2-ry+1)\overline{G}(y)\ (\text{mod. } q)$$

és így az:

$$\frac{y^{p^\alpha}-1}{y^{p^{\alpha-1}}-1}=y^{p^{\alpha-1}(p-1)}+y^{p^{\alpha-1}(p-2)}+\cdots+1 \qquad (7)$$

kifejezésnek (mod. q) van quadratikus tényezője. Már most a számelméletből a következő, raczionális úton bebizonyítható, tételekre hivatkozunk: *

A) Az

$$y^{q^n-1}-1,\ \frac{y^{p^\alpha}-1}{y^{p^{\alpha-1}}-1}\ (\text{mod. } q),\quad q \gtrless p$$

kifejezések vagy relativ primek (mod. q); vagy pedig, ha

$$q^n-1\equiv 0\ (\text{mod. } p^\alpha),$$

akkor

$$y^{q^n-1}-1 \quad \text{osztható} \quad \frac{y^{p^\alpha}-1}{y^{p^{\alpha-1}}-1}\text{-vel (mod. } q).$$

B) Azoknak a (mod. q) irreduczibilis kifejezéseknek, a melyeknek fokszáma n osztója, szorzata

$$\equiv y\,(y^{q^n-1}-1)\ (\text{mod. } q).$$

Mivel (7)-nek (mod. q) van quadratikus tényezője, tehát

$$q^2\equiv 1\ (\text{mod. } p^\alpha). \qquad (6)$$

6. Most már áttérhetünk a tétel bebizonyítására.

Adjunk z-nek elég nagy pozitiv értéket, a melyre még:

$$(z-2)^{\frac{p^{\alpha-1}(p-1)}{2}}\equiv -1\ (\text{mod. } p)$$

---

* V. ö. pl. DEDEKIND: Abriss einer Theorie etc. Crelle 54.

legyen. Ha már most β egy ily érték, akkor:

$$\Phi(\beta) > 1, \quad \Phi(\beta) \equiv -1 \pmod{p}. \tag{8}$$

Mivel $\Phi(\beta)$ törzstényezői (6) szerint $p^{\alpha}y \pm 1$ alakúak, azért (8)-ból következik, hogy köztük legalább egy olyan is van, a melynek alakja

$$p^{\alpha}y - 1. \qquad \text{q. e. d.}$$

Bauer Mihály.

A LEGNAGYOBB ENERGIAFORGALOM ELVÉRŐL.

A mechanika feladata a rendszerek mozgásának *leirása*, azaz a rendszerek térbeli elhelyezését jellemző adatoknak — a rendszerek *koordinátáinak* — a tapasztalattal megegyező kifejezése a t folyó idő függvényeiként s az eredményeknek lehetőleg kevés alapföltevésből kiinduló áttekinthető összefoglalása.

A tapasztalati jelenségek legnagyobb részénél a koordináták és az idő közti összefüggések nem mondhatók egyszerűeknek és áttekinthetőknek, egyszerűek azonban a koordináták időszerinti differencziálhányadosainak egymással és magukkal a koordinátákkal való összefüggései, a mozgásnak *differencziálegyenletei*. A mechanika feladata tehát más szóval a mozgások oly differencziálegyenleteinek egységes alapon való felállítása, a melyeknek megoldásai a valóságban végbemenő jelenségekkel megegyezésben vannak.

Ily a tapasztalattal igen jól megegyező differencziálegyenleteket szolgáltatnak a Newton-féle axiómák, melyek a mai mechanikának alapját képezik.

Némely esetben azonban ez axiómák alkalmazása különös, nem mindig egyszerű meggondolásokat igényel (kényszermozgás, egyensúlyi problemák), sőt újabb mellékaxiómák bevezetése nélkül nem is végezhető el, többen megkisérlették tehát oly általánosabb axiómák felállítását, a melyek a Newton-féléket helyettesíthetik, sőt oly esetekben, a melyekben a Newton-félék nem alkalmazhatók sikerrel, új eredményekre vezessenek. Így keletkeztek az ú. n. általános mechanikai elvek, a melyek közül legjobban a staczionárius működés Hamilton-féle elve felelt meg a hozzáfűzött reményeknek, minthogy a fizika más ágainak mechanikai alapon való tárgyalására is sikeresen alkalmazhatónak bizonyult.

OSTWALD ama helyes czélt tűzve ki, hogy az összes természeti jelenségek leirása egységes alapon történjék, egy egészen általános természettudományi elvet mondott ki,* a mely szerinte az energia megmaradásának elvével együtt az összes a természetben végbemenő jelenségeket egyértelműen meghatározza.

OSTWALD az elvet következőképen fogalmazza:

Az összes lehetséges energiaátalakulások közül az fog bekövetkezni, a mely adott időben a legnagyobb forgalmat létesíti.

Lehetséges energiaátalakulás (jelenség) az, a mely az energia megmaradása elvének és a rendszer egyéb feltételi egyenleteinek megfelel, a *lehetséges energiaátalakulás* tehát helyettesithető a «virtuális jelenség» kifejezéssel.

Legyen pl. egy rendszer összes energiája a t időpillanatban

$$E = E_1 + E_2 + \cdots + E_n,$$

a hol $E_1, E_2, \ldots, E_n$ csupa különböző energiafajok (mozgási, helyzeti, hőbeli, chemiai stb. energiák). Minden jelenség, a mely a rendszeren végbemegyen, az energiák átalakulásában áll. Legyenek az energiáknak egy virtuális jelenségnél dt idő alatt bekövetkező megváltozásai:

$$\delta E_1, \delta E_2, \ldots, \delta E_n,$$

melyekre nézve tehát az energia megmaradása elve folytán:

$$\delta E_1 + \delta E_2 + \cdots + \delta E_n = 0,$$

és legyen δE_{ik} az az energiamennyiség, a mely ezen jelenségnél E_i energiából E_k energiává alakult át, akkor, minthogy az energia megmaradása elvénél fogva:

$$\delta E_{ik} = -\delta E_{ki}$$

$$\begin{array}{lllll}
\delta E_1 = & \delta E_{12} & + \delta E_{13} & + \cdots + \delta E_{1n-1} & + \delta E_{1n} \\
\delta E_2 = & -\delta E_{12} & + \delta E_{23} & + \cdots + \delta E_{2n-1} & + \delta E_{2n} \\
\cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot \\
\delta E_{n-1} = & -\delta E_{1n-1} & -\delta E_{2n-1} & - \cdots - \delta E_{n-2\,n-1} & + \delta E_{n-1n} \\
\delta E_n = & -\delta E_{1n} & -\delta E_{2n} & - \cdots - \delta E_{n-2n} & - \delta E_{n-1n}.
\end{array}$$

* Lehrbuch der allgemeinen Chemie, 2. kiadás, II. kötet, 37. lap.

Energiaforgalom * alatt az átalakult energiamennyiség abszolut értéke

$$\begin{aligned}\delta F = | \delta E_{12} + \delta E_{13} + \cdots + \delta E_{1n} \\ + \delta E_{23} + \cdots + \delta E_{2n} \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ + \delta E_{n-1n} |\end{aligned}$$

értendő. OSTWALD axiómája azt mondja, hogy az összes virtuális jelenségek közül az fog tényleg bekövetkezni, a melynél δF maximum.

Pl. tisztán mechanikai jelenségeknél $n = 2$,

$E_1 = T$ a rendszer eleven ereje,

$E_2 = V$ a rendszer helyzeti energiája,

és OSTWALD principiuma következőképen fogalmazható:

Egy mechanikai rendszeren az összes az energia megmaradásával és feltételi egyenleteivel összeférő elemi konfigurácziőváltozások közül az fog tényleg végbemenni, a melynél

$$\delta F = | \delta T | = | \delta V |$$

maximum.

OSTWALD principiumának a mechanikába való bevezetése akkor lesz előnyös, ha általa a mozgások egyszerű leirása lehetséges lesz, ha pl. levezethetők belőle a NEWTON-féle mozgásegyenletek, vagy esetleg oly más differencziálegyenletek, a melyekkel a mozgásoknak a NEWTON-féléknél még egyszerűbb leirása lehetséges. Ha ez eshetőségek egyike valóban bekövetkeznék, akkor OSTWALD elve alapján épitenők fel a mechanikát s örülnénk, hogy a mechanikát egy az egész természettudományt magában foglaló elv keretébe tudtuk illeszteni.

Az első lépést ily irányban CARL NEUMANN tette meg, a ki OSTWALD elvéből tényleg levezette a NEWTON-féle differencziálegyenleteket, azonban csupán egy teljesen nyugalomban lévő rendszer mozgásba jövésének első pillanatára.**

* OSTWALD az *Energieumsatz* szót használja; «energiaforgalom» helyett lehet esetleg az energiaáttétel» kifejezést használni.

** Berichte über die Verhandlungen der königlich sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften zu Leipzig. 44. kötet, 1892, 184. lap.

Neumann ugyanis a következő tételt bizonyítja be :*

Ha egy m tömegű anyagi pont koordinátái a t időben x, y, z, a reá ható erők komponensei :

$$-\frac{\partial V}{\partial x}, \quad -\frac{\partial V}{\partial y}, \quad -\frac{\partial V}{\partial z}.$$

akkor, ha $t = t_0$ időpillanatban

$$\frac{dx}{dt} = 0, \quad \frac{dy}{dt} = 0, \quad \frac{dz}{dt} = 0,$$

annál az elemi elmozdulásnál, a melynél az eleven erő megváltozása maximum, $t = t_0$ időpillanatban

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{\partial V}{\partial x},$$
$$m\frac{d^2y}{dt^2} = -\frac{\partial V}{\partial y},$$
$$m\frac{d^2z}{dt^2} = -\frac{\partial V}{\partial z}.$$

A nyugalomból való mozgásba jövés tehát Newton axiómájának megfelelően történik.

Megfelel továbbá Ostwald principiumának az a körülmény is, hogy, a mint igen egyszerűen bebizonyítható, ugyanazon pontra ható erőknek a parallelogramm tétele szerint képezett eredője azt az irányt jelöli ki, a mely irányban történő ds elmozdulásnál a komponensek munkája nagyobb, mint az a munka, melyet a komponensek a pontnak bármely más irányú, ds nagyságú elmozdulása mellett végeznek.

Jelöljék ugyanis

$$P_1, P_2, \ldots, P_n$$

n ugyanazon pontra ható erő nagyságát s legyenek $(i = 1, 2, \ldots, n)$

* A jelölések Neumannétól eltérők s az itt említett tétel Neumann pontrendszerekre vonatkozó általánosabb tételének speciális esete. Áttekinthetőség kedvéért a következőkben is anyagi pont, nem pedig pontrendszer mozgását fogjuk tárgyalni, a mi a szóban forgó problémánál lényegtelen megszorítás.

P_i iránykoszinuszai egy adott derékszögű tengelyrendszerre nézve $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$. A pont ds elmozdulásának iránykoszinuszai pedig α, β, γ. Az erőknek a ds elmozdulás közben végzett munkája

$$dL = \sum_{i=1}^{n} P_i \cos(P_i, ds) = ds \sum_{i=1}^{n} P_i(\alpha_i\alpha + \beta_i\beta + \gamma_i\gamma).$$

Mint ismeretes dL állandó ds-nél maximum lesz, ha α, β, γ-t az

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1 \tag{1}$$

föltételi egyenletnek megfelelően variálva dL megváltozása $=0$. Tehát:

$$\frac{\partial(dL)}{\partial\alpha}\delta\alpha + \frac{\partial(dL)}{\partial\beta}\delta\beta + \frac{\partial(dL)}{\partial\gamma}\delta\gamma =$$

$$= ds\Big[\sum_{i=1}^{n}(P_i\alpha_i)\delta\alpha + \sum_{i=1}^{n}(P_i\beta_i)\delta\beta + \sum_{i=1}^{n}(P_i\gamma_i)\delta\gamma\Big] = 0, \tag{2}$$

$\delta\alpha, \delta\beta, \delta\gamma$ mindazon értékeinél, melyeknél (1)-ből

$$\alpha\delta\alpha + \beta\delta\beta + \gamma\delta\gamma = 0. \tag{3}$$

Tehát, ha 2)-ben az állandó ds-sel végigosztva s a 3)-at egy $-\lambda$ tényezővel megszorozva a 2)-höz hozzáadjuk $\delta\alpha, \delta\beta, \delta\gamma$ együtthatóinak zérussal kell egyenlőknek lenni:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n}(P_i\alpha_i) - \lambda\alpha &= 0, \\ \sum_{i=1}^{n}(P_i\beta_i) - \lambda\beta &= 0, \\ \sum_{i=1}^{n}(P_i\gamma_i) - \lambda\gamma &= 0. \end{aligned} \tag{4}$$

A 4) alatti rendszer az 1) alatti egyenlettel együtt, meghatározzák azt az α, β, γ irányt, a melynél dL maximum; ugyanis 4)-ből

$$\alpha = \frac{\Sigma P_i\alpha_i}{\lambda}, \quad \beta = \frac{\Sigma P_i\beta_i}{\lambda}, \quad \gamma = \frac{\Sigma P_i\gamma_i}{\lambda}$$

de 1)-ből:

$$\frac{(\Sigma P_i\alpha_i)^2 + (\Sigma P_i\beta_i)^2 + (\Sigma P_i\gamma_i)^2}{\lambda^2} = 1,$$

tehát:

$$\alpha=\frac{\Sigma P_i\alpha_i}{\{(\Sigma P_i\alpha_i)^2+(\Sigma P_i\beta_i)^2+(\Sigma P_i\gamma_i)\}^{\frac{1}{2}}},$$

$$\beta=\frac{\Sigma P_i\beta_i}{\{(\Sigma P_i\alpha_i)^2+(\Sigma P_i\beta_i)^2+(\Sigma P_i\gamma_i)\}^{\frac{1}{2}}},$$

$$\gamma=\frac{\Sigma P_i\gamma_i}{\{(\Sigma P_i\alpha_i)^2+(\Sigma P_i\beta_i)^2+(\Sigma P_i\gamma_i)^2\}^{\frac{1}{2}}},$$

α, β, γ nem egyebek, mint a parallelogramm tétele szerint képezett eredő erő iránykoszinuszai.

E fontos körülmény tehát szintén Ostwald princzipiumának alkalmazhatósága mellett szól, mellette szól végre ama mozgás vizsgálata is, a melyet Ostwald maga emlit fel az idézett helyen axiómájának támogatása czéljából, a szabadon eső anyagi pont mozgása.

A pusztán a Föld vonzó erejének alávetett m tömegű P anyagi pontnak a Föld O középpontja felé irányuló sebessége legyen a t időpillanatban u, ugyanakkor legyen a pont magassága pl. a Földnek ama pontbeli érintő síkja fölött, a melyben a PO egyenes a Föld felületét metszi, x. Ha a pont a PO egyenes mentén esik tovább, egy bizonyos τ idő mulva bizonyos u_1 sebességre tesz szert, mely az eleven erő tétele alapján kiszámitható, ha ismerjük az anyagi pont magasságát a $t+\tau$ időpillanatban, x_1-t; ugyanis:

$$\tfrac{1}{2}m(u_1^2-u^2)=mg(x-x_1), \tag{5)}$$

a hol g a nehézség gyorsulása.

Ha a pont nem a PO irányban folytatná mozgását, hosszabb utat kellene leirnia, míg az x_1 magasságot eléri, e magasságban azonban végsebességének nagysága ismét az 5) alatti egyenletből adódnék ki, csak iránya volna más, mint u_1-é, következik tehát, hogy a PO irányától eltérő x_1 magasságig érő utakat hoszszabb idő alatt futná be a pont, mint a PO irányába eső $x-x_1$ utat, adott időben tehát a PO irányában történik a legnagyobb sebességváltozás, a legnagyobb *energiaforgalom* és tényleg tapasztaljuk, hogy a valóságban épen ily irányú lesz a mozgás.

Ostwald axiómájának e szép eredményeivel szemben kissé meglepő ama kijelentés, hogy még sem általános érvényű. Általános érvényességét már BOLTZMANN tagadta,* a nélkül azonban, hogy állítását bebizonyította volna, és ép ezért maradtak fizikusok, a kik nem voltak meggyőződve az elv helytelenségéről. Így JANUSCHKE ** és DRESSEL *** ép oly általános érvényességet tulajdonítanak neki, mint az energia megmaradása elvének, sőt MACH «*Die Mechanik in ihrer Entwickelung*» czimű rendkivül finom kritikával megirott művének legújabb kiadásában a 393. lapon a legkisebb kényszer GAUSS-féle elvének méltatásánál, azt lényegében azon elvvel azonosnak mondja, hogy *minden munka, a mely elvégezhető, tényleg el is végeztetik.* Hogy mit kell *elvégezhető munka* alatt érteni, azt MACH nem határozza meg részletesebben, a szó szerint vett MACH-féle elvből pedig már következik az, hogy a tényleges mozgásnál a végzett munka maximum, mert ha lehetne az erőknek ennél nagyobb munkát végezniök, akkor MACH princzipiuma szerint azt el is végeznék, s ugyanezt mondja OSTWALD elve is.

Mindez arra ösztönzött, hogy megvizsgáljam, mily mozgásegyenleteket szolgáltat OSTWALD elve egy tetszőleges anyagi rendszer mozgására nézve s azt találtam, hogy e mozgásegyenletek *általában* a NEWTON-féléktől teljesen eltérők és csupán ama speciális esetekben, melyeket CARL NEUMANN és OSTWALD megvizsgáltak, esnek a NEWTON-féle differencziál-egyenletekkel össze.

A következőkben, áttekinthetőség kedvéért, egy anyagi pont mozgásának leirását adom OSTWALD elve alapján, megjegyezvén, hogy szóról-szóra ugyanily meggondolások anyagi rendszerekre is alkalmazhatók, csak a képletekben kell alkalmas módon nehány szummácziót végezni.

*

Legyenek adva egy m tömegű anyagi pontnak

$$x, y, z$$

* Annalen der Physik und Chemie, 3. sorozat, 57. kötet, 1896, 45. lap.

** H. JANUSCHKE, Das Prinzip der Erhaltung der Energie, Leipzig, 1897, 12, 105 lap.

*** L. DRESSEL, Elementares Lehrbuch der Physik nach den neuesten Anschauungen, Freiburg in Breisgau, 1900, 253 l.

koordinátái és

$$u, v, w$$

sebességi komponensei a t időpillanatban; ugyanakkor legyenek a reáható erők derékszögű komponensei:

$$X, Y, Z.$$

Ezen erőket következőképen definiáljuk: A pontnak egy

$$dx = udt, \ dy = vdt, \ dz = wdt$$

komponensekkel biró elmozdulása közben végzett *munka* alatt a dx, dy, dz összetevőknek egy bizonyos homogén lineár függvényét értjük, a melyben az együtthatók csupán az x, y, z koordináták függvényei; a

$$Xdx + Ydy + Zdz$$

függvény együtthatóinak, az erőknek meghatározása meghatározza egyúttal a mozgást is, minthogy a pont mozgására nézve föltesszük:

I. Hogy a pontnak minden elemi elmozdulása közben végzett munka egyenlő az eközben bekövetkezett eleven erőbeli megváltozással. (Az energia megmaradásának elve.)

II. Hogy minden adott időben végzett munka, vagy a mi ezzel egyértelmű, az eközben bekövetkezett eleven erőbeli változás a legnagyobb mindazon eleven erőbeli változások közt, a melyek ugyanazon idő alatt az energia megmaradása és a mozgó pont esetleges egyéb feltételi egyenletei megsértése nélkül bekövetkezhetnének. (OSTWALD elve.)

Hogy tárgyalásaink általánosságukból ne veszitsenek, még azt is fel fogjuk tenni, hogy a pont egy előirt felületen tartozik mozogni, hogy tehát a koordináták közt fennáll a következő feltételi egyenlet:

$$\varphi(x, y, z) = 0, \tag{1}$$

a mely feltételi egyenletről azonban felteszszük, hogy sem az időt, sem a koordinátáknak időszerinti differencziálhányadosait expliczite nem tartalmazzák. Azzal a problémával, midőn a pont előirt pályán mozog, azaz a koordináták közt két feltételi egyenlet áll fenn, nem kell foglalkoznunk, minthogy ebben az esetben már maga az energia megmaradásának elve a mozgást teljesen meghatározza, s az OSTWALD-féle elv alkalmazása fölöslegessé válik.

Legyen τ egy véges, de kicsiny időköz, úgy, hogy a koordinátáknak eközben az I. és 1) alatti feltételeket kielégítő megváltozásainak második és magasabb fokú kifejezései az elsőkhöz képest elhanyagolható kicsinyek legyenek, akkor könnyen belátható, hogy az a L_τ munka, melyet az erők egy ily elmozdulás közben végeznek, ha $\bar{x}$, $\bar{y}$, $\bar{z}$ a pont koordinátái a $t+\tau$ időpillanatban s az $x \ldots \bar{x}$, $y \ldots \bar{y}$, $z \ldots \bar{z}$ közöket következőképen képzeljük közbeiktatott x_i, y_i, z_i pontokkal apróbb közökre osztva:

$$\begin{array}{l} x, x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}, x_i, \ldots, x_{n-1}, \bar{x} \\ y, y_1, y_2, \ldots, y_{i-1}, y_i, \ldots, y_{n-1}, \bar{y} \\ z, z_1, z_2, \ldots, z_{i-1}, z_i, \ldots, z_{n-1}, \bar{z} \end{array}$$

a következőképen lesz kifejezhető:

$$L_\tau = \int_t^{t+\tau} (Xu + Yv + Zw)\, dt =$$

$$= \lim_{\substack{x_i - x_{i-1} = 0 \\ y_i - y_{i-1} = 0 \\ z_i - z_{i-1} = 0}} \sum_{i=1}^{n} \Bigg\{ \Bigg[X(x, y, z) + \frac{\partial X(x, y, z)}{\partial x}(x_i - x) +$$

$$+ \frac{\partial X(x, y, z)}{\partial y}(y_i - y) + \frac{\partial X(x, y, z)}{\partial z}(z_i - z)\Bigg](x_i - x_{i-1}) +$$

$$+ \Bigg[Y(x, y, z) + \frac{\partial Y(x, y, z)}{\partial x}(x_i - x) +$$

$$+ \frac{\partial Y(x, y, z)}{\partial y}(y_i - y) + \frac{\partial Y(x, y, z)}{\partial z}(z_i - z)\Bigg](y_i - y_{i-1}) +$$

$$+ \Bigg[Z(x, y, z) + \frac{\partial Z(x, y, z)}{\partial x}(x_i - x) +$$

$$+ \frac{\partial Z(x, y, z)}{\partial y}(y_i - y) + \frac{\partial Z(x, y, z)}{\partial z}(z_i - z)\Bigg](z_i - z_{i-1})\Bigg\}.$$

a hol $x_0=x$, $y_0=y$, $z_0=z$ és $x_n=\bar{x}$, $y_n=\bar{y}$, $z_n=\bar{z}$. Ha pedig $\bar{x}-x$, $\bar{y}-y$, $\bar{z}-z$, tehát annál inkább x_i-x, y_i-y, z_i-z magasabbrendű kifejezéseit elhanyagoljuk, azt kapjuk, hogy

$$L_\tau = X(x, y, z)\lim\sum_{i=1}^{n}(x_i-x_{i-1}) +$$
$$+ Y(x, y, z)\lim\sum_{i=1}^{n}(y_i-y_{i-1}) + Z(x, y, z)\lim\sum_{i=1}^{n}(z_i-z_{i-1}) =$$
$$= X(\bar{x}-x) + Y(\bar{y}-y) + Z(\bar{z}-z),$$

a hol X, Y, Z az x, y, z pontra vonatkoznak.

Legyenek $\bar{u}$, $\bar{v}$, $\bar{w}$ a sebességi komponensek az $\bar{x}$, $\bar{y}$, $\bar{z}$ pontban, akkor $\bar{x}-x$, $\bar{y}-y$, $\bar{z}-z$, ha τ elég kicsiny, így irhatók:

$$\bar{x}-x = \frac{\tau}{2}(\bar{u}+u), \quad \bar{y}-y = \frac{\tau}{2}(\bar{v}+v), \quad \bar{z}-z = \frac{\tau}{2}(\bar{w}+w).$$

Ezen egyenlőségek annál pontosabban állanak fenn, minél kisebb τ, végeredményeink tehát egészen szigorúak lesznek, minthogy át fogunk térni a határra, melynél $\tau = 0$.

A τ idő alatt végzett munkának egyenlőnek kell lenni az aközben bekövetkezett eleven erőbeli megváltozással, tehát:

$$F = \frac{1}{2} m(\bar{u}^2+\bar{v}^2+\bar{w}^2-u^2-v^2-w^2) -$$
$$- \frac{\tau}{2}[X(\bar{u}+u)+Y(\bar{v}+v)+Z(\bar{w}+w)] = 0. \qquad \text{I}')$$

Az $\bar{x}$, $\bar{y}$, $\bar{z}$ pontnak azonban az 1) feltételi egyenletet is ki kell elégítenie, tehát:

$$\varphi(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) = \varphi(x, y, z) + \frac{\partial\varphi}{\partial x}(x, y, z)(\bar{x}-x) +$$
$$+ \frac{\partial\varphi}{\partial y}(x, y, z)(\bar{y}-y) + \frac{\partial\varphi}{\partial z}(x, y, z)(\bar{z}-z) + \Phi,$$

a hol Φ minden tagja $\bar{x}-x$, $\bar{y}-y$, $\bar{z}-z$ másodrendű kifejezését tartalmazza, tehát mivel

$$\varphi(x, y, z) = 0,$$

és τ-t kellő kicsinynek választottuk,

$$G = \frac{\partial\varphi}{\partial x}(\bar{x}-x) + \frac{\partial\varphi}{\partial y}(\bar{y}-y) + \frac{\partial\varphi}{\partial z}(\bar{z}-z) =$$

$$= \frac{\tau}{2}\left[\frac{\partial\varphi}{\partial x}(\bar{u}+u) + \frac{\partial\varphi}{\partial y}(\bar{v}+v) + \frac{\partial\varphi}{\partial z}(\bar{w}+w)\right] = 0. \qquad 2)$$

Kérdés, mily feltételek mellett lesz az eleven erő megváltozása legnagyobb, mind ama megváltozások között, a melyek a τ idő alatt az I') és 2) egyenleteknek megfelelő elmozdulások közben bekövetkezhetnének.

Ez most már csak egyszerű relativ szélső érték feladat, minthogy így fogalmazható: Milyen függvényei a t parameternek

$\bar{u}$, $\bar{v}$, $\bar{w}$, ha $f(\bar{u}\,\bar{v}, \bar{w}) = \frac{1}{2} m(\bar{u}^2+\bar{v}^2+\bar{w}^2-u^2-v^2-w^2)$

úgy lesz maximum, hogy az I') és 2) feltételek ki legyenek elégitve. A τ, x, y, z, u, v, w, X, Y, Z, $\frac{\partial\varphi}{\partial x}$, $\frac{\partial\varphi}{\partial y}$, s i. t. mennyiségek egyszerű állandók szerepét játszák.

Tudjuk, hogy ha $f(\bar{u}, \bar{v}, \bar{w})$ maximum

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{u}}\delta\bar{u} + \frac{\partial f}{\partial \bar{v}}\delta\bar{v}, \frac{\partial f}{\partial \bar{w}}\delta\bar{w} \qquad \text{II)}$$

$\delta\bar{u}$, $\delta\bar{v}$, $\delta\bar{w}$ mindazon értékeinél zérussal egyenlő, a melyeknél

$$\frac{\partial F}{\partial \bar{u}}\delta\bar{u} + \frac{\delta F}{\partial \bar{v}}\delta\bar{v} + \frac{\delta F}{\partial \bar{w}}\delta\bar{w} = 0, \qquad 3)$$

$$\frac{\partial G}{\partial \bar{u}}\delta\bar{u} + \frac{\partial G}{\partial \bar{v}}\delta\bar{v} + \frac{\partial G}{\partial \bar{w}}\delta\bar{w} = 0,^* \qquad 4)$$

azaz:

$$\bar{u}\delta\bar{u} + \bar{v}\delta\bar{v} + \bar{w}\delta\bar{w} = 0, \qquad 5)$$

hacsak

$$\left(m\bar{u} - \frac{\tau}{2}X\right)\delta\bar{u} + \left(m\bar{v} - \frac{\tau}{2}Y\right)\delta\bar{v} + \left(m\bar{w} - \frac{\tau}{2}Z\right)\delta\bar{w} = 0, \qquad 6)$$

$$\frac{\tau}{2}\frac{\partial\varphi}{\partial x}\delta\bar{u} + \frac{\tau}{2}\frac{\partial\varphi}{\partial y}\delta\bar{v} + \frac{\tau}{2}\frac{\partial\varphi}{\partial z}\delta\bar{w} = 0. \qquad 7)$$

---

* A szélsőérték létezésének elegendő föltételeinek, a második variációknak tekintetbe vétele új feltételeket nem szolgáltat $\bar{u}$, $\bar{v}$, $\bar{w}$ számára, minthogy $f(\bar{u}, \bar{v}, \bar{w})$, $F(\bar{u}, \bar{v}, \bar{w})$, $G(\bar{u}, \bar{v}, \bar{w})$ második variációi rendre:

$$m[(\delta\bar{u})^2+(\delta\bar{v})^2+(\delta\bar{w})^2], \quad m[(\delta\bar{u})^2+(\delta\bar{v})^2+(\delta\bar{w})^2], \quad 0,$$

s ezek mind $\delta\bar{u}$, $\delta\bar{v}$, $\delta\bar{w}$-től függetlenül állandó előjelűek.

Ha tehát a 6) bal oldalát λ, a 7)-ét $-\mu$-vel megszorozva az 5) bal oldalához hozzáadjuk, az így nyert egyenletnek λ, μ minden értékénél fenn kell állania, tehát akkor is, ha λ, μ-t úgy választjuk, hogy $\delta\bar{u}$, $\delta\bar{v}$ együtthatói zérussal legyenek egyenlők; de akkor $\delta\bar{w}$ együtthatója is zérussal tartozik egyenlőnek lenni. $\bar{u}$, $\bar{v}$, $\bar{w}$, λ, μ meghatározására tehát a következő öt egyenlet szolgál:

$$(1+\lambda)m\bar{u}-\frac{\tau}{2}\left[\lambda X+\mu\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right]=0, \tag{8}$$

$$(1+\lambda)m\bar{v}-\frac{\tau}{2}\left[\lambda Y+\mu\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right]=0, \tag{9}$$

$$(1+\lambda)m\bar{w}-\frac{\tau}{2}\left[\lambda Z+\mu\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right]=0, \tag{10}$$

továbbá az 1') és 2) egyenletek.

μ a φ függvény speciális szerkezetétől függ, λ azonban ettől függetlenül meghatározható.

Szorozzuk meg ugyanis az 1') egyenlet bal oldalát λ-val s vonjuk ki belőle a 8) alatti egyenlet bal oldalának $(u+\bar{u})$-szorosát, a 9) bal oldalának $(v+\bar{v})$-szeresét végre a 10) bal oldalának $(w+\bar{w})$-szeresét, akkor a μ-vel szorzott tagok a 2) alapján ki fognak esni és marad:

$$\frac{\lambda}{2}(\bar{u}^2+\bar{v}^2+\bar{w}^2-u^2-v^2-w^2)-$$

$$-(1+\lambda)\big(\bar{u}(u+\bar{u})+\bar{v}(v+\bar{v})+\bar{w}(w+\bar{w})\big)=0,$$

innen

$$\frac{2(1+\lambda)}{\lambda}=\frac{\bar{u}^2+\bar{v}^2+\bar{w}^2-u^2-v^2-w^2}{\bar{u}(u+\bar{u})+\bar{v}(v+\bar{v})+\bar{w}(w+\bar{w})}.$$

Ha most a 8), 9) és 10) alatti egyenleteket $\frac{\tau\lambda}{2}$-val elosztjuk és a következő jelölést vezetjük be:

$$\frac{\mu}{\lambda}=\rho_1,$$

azt kapjuk, hogy:

$$X + \rho_1 \frac{\partial \varphi}{\partial x} = m \frac{\bar{u}}{\tau} \frac{\bar{u}^2 + \bar{v}^2 + \bar{w}^2 - u^2 - v^2 - w^2}{\bar{u}(\bar{u}+u) + \bar{v}(\bar{v}+v) + \bar{w}(\bar{w}+w)} \qquad 11)$$

$$Y + \rho_1 \frac{\partial \varphi}{\partial y} = m \frac{\bar{v}}{\tau} \frac{\bar{u}^2 + \bar{v}^2 + \bar{w}^2 - u^2 - v^2 - w^2}{\bar{u}(\bar{u}+u) + \bar{v}(\bar{v}+v) + \bar{w}(\bar{w}+w)} \qquad 12)$$

$$Z + \rho_1 \frac{\partial \varphi}{\partial z} = m \frac{\bar{w}}{\tau} \frac{\bar{u}^2 + \bar{v}^2 + \bar{w}^2 - u^2 - v^2 - w^2}{\bar{u}(\bar{u}+u) + \bar{v}(\bar{v}+v) + \bar{w}(\bar{w}+w)}. \qquad 13)$$

Térjünk át most ezen egyenletek mindkét oldalán a határértékre, úgy, hogy

$$\lim \tau = 0,$$

és jelöljük $\lim\limits_{\tau=0} \rho_1$-t ρ-val, akkor, minthogy

$$\lim_{\tau=0} \frac{\bar{u}}{\tau} \frac{\bar{u}^2 + \bar{v}^2 + \bar{w}^2 - u^2 - v^2 - w^2}{\bar{u}(\bar{u}+u) + \bar{v}(\bar{v}+v) + \bar{w}(\bar{w}+w)} =$$

$$= \lim_{\tau=0} \frac{(\bar{u}+u)\frac{\bar{u}-u}{\tau} + (\bar{v}+v)\frac{\bar{v}-v}{\tau} + (\bar{w}+w)\frac{\bar{w}-w}{\tau}}{\bar{u}(\bar{u}+u) + \bar{v}(\bar{v}+v) + \bar{w}(\bar{w}+w)} \bar{u},$$

és mivel

$$\lim_{\tau=0} \bar{u} = u = x', \quad \lim_{\tau=0} \bar{v} = v = y', \quad \lim_{\tau=0} \bar{w} = w = z',$$

továbbá:

$$\lim_{\tau=0} \frac{\bar{u}-u}{\tau} = \frac{du}{dt} = x''$$

a gyorsulás x-menti összetevője, hasonlóképen

$$\lim_{\tau=0} \frac{\bar{v}-v}{\tau} = \frac{dv}{dt} = y'' \quad \text{és} \quad \lim_{\tau=0} \frac{\bar{w}-w}{\tau} = \frac{dw}{dt} = z'',$$

a következő mozgásegyenleteket kapjuk egy pont OSTWALD axiómájának minden t időpillanatban megfelelő mozgására:

$$\left.\begin{aligned}
X + \rho \frac{\partial \varphi}{\partial x} &= mx' \frac{x'x'' + y'y'' + z'z''}{x'^2 + y'^2 + z'^2} = mx' \frac{1}{2T} \frac{dT}{dt}, && 14)\\
Y + \rho \frac{\partial \varphi}{\partial y} &= my' \frac{x'x'' + y'y'' + z'z''}{x'^2 + y'^2 + z'^2} = my' \frac{1}{2T} \frac{dT}{dt}, && 15)\\
Z + \rho \frac{\partial \varphi}{\partial z} &= mz' \frac{x'x'' + y'y'' + z'z''}{x'^2 + y'^2 + z'^2} = mz' \frac{1}{2T} \frac{dT}{dt}, && 16)\\
&\varphi(x, y, z) = 0,
\end{aligned}\right\} \text{III)}$$

míg NEWTON axiómái szerint a III) rendszer első három egyenletének jobb oldala

$$mx'', \quad my'', \quad mz''$$

volna.

Általában tehát OSTWALD axiómája a NEWTON-féle differencziálegyenletektől eltérő eredményeket szolgáltat, minthogy a III) alatti rendszerben szereplő erőkomponensek

$$X + \rho \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad Y + \rho \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \quad Z + \rho \frac{\partial \varphi}{\partial z}$$

nem a gyorsulási, hanem a sebességi összetevőkkel arányosak, továbbá míg a NEWTON-féle mechanikában az x-menti erőkomponens csupán a mozgás x-menti megváltozásától, az x-menti gyorsulástól függ, itt minden erőkomponensben a más komponensek irányában történő mozgás és változása is szerepel, a mennyiben ugyanis minden erőkomponens kifejezésében az

$$\frac{1}{T}\frac{dT}{dt} = \frac{d}{dt}(\ln. T)$$

is előfordul.

Vannak azonban specziális esetek, a melyekben az OSTWALD-féle mozgás összeesik a NEWTON-félével és épen ezek azok az esetek, a melyeket CARL NEUMANN és OSTWALD megvizsgáltak, és a melyekből az energiaforgalom elvének helyességére következtettek.

Ha ugyanis a t időpillanatban

$$x' = y' = z' = 0$$

a III) alatti rendszer tényleg a NEWTON-féle egyenleteket szolgáltatja s ez az az eset, a melyet CARL NEUMANN a Leipziger Berichtében vizsgált meg.

Tegyünk ugyanis a 11), 12) és 13) alatti egyenletekben, a melyek az erőkomponensek kifejezését adják, mielőtt még a τ-t minden határon túl kicsinyítettük volna, u, v, w helyébe zérust, akkor jobb oldalt

$$m\frac{\bar{u}}{\tau}, \quad m\frac{\bar{v}}{\tau}, \quad m\frac{\bar{w}}{\tau}$$

marad, a mi így is irható:

$$m\frac{\bar{u}-u}{\tau},\quad m\frac{\bar{v}-v}{\tau},\quad m\frac{\bar{w}-w}{\tau}$$

s e kifejezések határértékei, ha $\lim \tau = 0$, valóban a gyorsulási komponensek.

OSTWALD említett példája pedig egyenesvonalú mozgás és tényleg bármely egyenesvonalú mozgásra nézve a III) rendszer a NEWTON-féle mozgásegyenleteket szolgáltatja; ha ugyanis a mozgás pl. az x tengely mentén történik, akkor

$$y' = z' = 0$$

s a III) rendszer jobb oldala megint mx''-re redukálódik.

Megjegyzendő azonban, hogy bármely az energia megmaradásának elvével összeférő axioma egyenesvonalú mozgás esetére szükségképen a NEWTON-féle mozgásegyenleteket szolgáltatja, minthogy ezen egyenletek egyenesvonalú mozgásnál már magából az energia megmaradásának elvéből következnek.

Ez esetben ugyanis az energia megmaradásának elve:

$$dT = mx'x''dt = Xdx = Xx'dt,$$

tehát

$$mx'' = X.$$

Az tehát, hogy a III) rendszer egyenesvonalú mozgás esetén a NEWTON-féle egyenleteket szolgáltatja, az OSTWALD-féle principiumra legkevésbbé sem jellemző, mert ez egyáltalában nem is az OSTWALD-féle elv folyománya. Jellemző tulajdonságát mondja ki azonban OSTWALD elvének a következő tétel:

Ostwald axiómája szabad pont esetén csakis egyenesvonalú mozgásnál szolgáltatja a mozgás teljes lefolyására a Newton-féle differencziálegyenleteket.

Abból ugyanis, hogy a III) rendszer, a melyet most szabadon mozgó pont esetére így irhatunk fel:

$$
\begin{aligned}
X &= mx' \frac{1}{2T} \frac{dT}{dt}, \\
Y &= my' \frac{1}{2T} \frac{dT}{dt}, \qquad \text{III}') \\
Z &= mz' \frac{1}{2T} \frac{dT}{dt},
\end{aligned}
$$

és a

$$X = mx'', \quad Y = my'', \quad Z = mz''$$

egyenletek t minden értékénél egyszerre fennállanak, az következik, hogy t minden értékénél;

$$\frac{x''}{x'} = \frac{y''}{y'} = \frac{z''}{z'},$$

azaz

$$\frac{d}{dt}(\ln x') = \frac{d}{dt}(\ln y') = \frac{d}{dt}(\ln z'),$$

tehát

$$\ln x' = \ln y' + \ln B = \ln z' + \ln C,$$

a hol B és C az időtől független számértékek.

Áttérve a numerusokra:

$$x' = By' = Cz',$$

és integrálva az idő szerint:

$$x = By + B_1 = Cz + C_1,$$

a hol B_1 és C_1 szintén az időtől független állandók. Ezen eredmény értelmében a pálya *egyenes.*

Minden esetben tehát, melyben a Newton-féle egyenletek nem egyenesvonalú mozgást szolgáltatnak, egy más, szintén görbevonalú mozgásra vezetnek a III') alatti differencziálegyenletek is.

Így nemcsak nem lehet a bolygók mozgását Keppler tapasztalati törvényeinek megfelelően Ostwald axiómája alapján a Newton-féle gravitáczióval leírni, hanem e leirás egyáltalában semmiféle czentrális erővel sem sikerül; minthogy ugyanis az Ostwald axiómájából származtatott egyenletek szerint a sebességi komponensek mindig az erőkomponensekkel arányosak, czentrális erő esetén a sebesség, azaz a pálya érintője, mindig az erőczentrum felé irányul, az erőczentrumhoz (Naphoz) viszonyitott relativ pálya tehát csak egyenes lehet.

Mindez nem zárja ki azt, hogy OSTWALD princzipiuma alapján a mechanika ellenmondás nélkül és a tapasztalattal megegyezően felépithető legyen, csakhogy a valóságban végbemenő jelenségek leirására más erők föltételezése lesz szükséges, mint a milyenek a NEWTON-féle mechanikában szerepeltek. Sőt a mozgásegyenletek rendje, ha oly erőkkel van dolgunk, a melyek a koordináták valamely $-V$ függvényének a koordináták szerinti differencziálhányadosai, egygyel alábbszáll; ez esetben ugyanis az energia megmaradásának elve:

$$\tfrac{1}{2} m (x'^2 + y'^2 + z'^2) + V(x, y, z) = C, \qquad 17)$$

a hol C a probléma kezdőadatai által meghatározott állandó, és a III')-ból pedig azt kapjuk, hogy:

$$y' = \frac{Y}{X} x' \qquad z' = \frac{Z}{X} x',$$

tehát y' és z' értékét 17)-be téve azt kapjuk, hogy:

$$\frac{dx}{dt} = \sqrt{\frac{2(C-V)X^2}{m(X^2+Y^2+Z^2)}},$$

hasonlóképen
$$\frac{dy}{dt} = \sqrt{\frac{2(C-V)Y^2}{m(X^2+Y^2+Z^2)}}, \qquad \text{IV)}$$

$$\frac{dz}{dt} = \sqrt{\frac{2(C-V)Z^2}{m(X^2+Y^2+Z^2)}}.$$

Ez egy elsőrendű szimultán differencziálegyenletrendszer x, y, z meghatározására, mig a NEWTON-féle rendszer másodrendű.

Mégsem volna egyáltalában előnyös a mechanikát OSTWALD tétele alapján felépiteni, még pedig — eltekintve attól, hogy semmi okunk sincs a NEWTON-félétől megválni — főleg a következő tétel következtében, a mely tétel megfelelne az OSTWALD-féle mechanikában az első NEWTON-féle axiómának:

Egy teljesen magára hagyott pont állandó eleven erővel mozoghat egy tetszőleges görbén (pl. egyenletes sebességgel egy egyenesen, egyenletes szögsebességgel egy tetszőleges sugarú körpályán stb.).

A tétel helyessége azonnal világos onnan, hogy ha a III′ egyenletrendszerben T állandó, akkor $X=Y=Z=0$ t minden értékénél. Az OSTWALD-féle mechanikában tehát a magára hagyott pont mozgása távolról sem volna annyira meghatározva, mint a NEWTON-félében, ebben ugyanis, ha egy bizonyos időpillanatban ismerjük a magára hagyott pont mozgási állapotát, ezzel mozgásának további lefolyása is meg van határozva, míg az OSTWALD-féle mechanikában a pont pályája teljesen határozatlan maradna.

És most látni, mi a főhibája az OSTWALD-féle principiumnak: az, hogy nem számol az anyag *tehetetlenségével* s ime épen ez az, a mi képtelenné teszi a mechanikai jelenségek leírására.

*

Legyen végre szabad az OSTWALD-féle principiumnak egy formai kapcsolatát a KŐNIG-féle energéma elvvel felemlítenem:

A III′) rendszerből, ha y' helyébe $\frac{Y}{X}x'$-t, z helyébe $\frac{Z}{X}x'$-t irunk (ha y'-t és z'-t kiküszöböljük), a következő egyenletet kapjuk:

$$\frac{1}{m}(X^2+Y^2+Z^2)=Xx''+Yy''+Zz''. \tag{V}$$

A bal oldalon álló kifejezés az X, Y, Z erők kétszeres energémája, a jobb oldali kifejezés pedig gyorsulási viriálja (KŐNIG elnevezései); KŐNIG energéma elvének egyik alakja pedig a következő:

A szabad erők gyorsulási viriálja egyenlő ugyanazon erők kétszeres energémájával és a tényleg végbemenő mozgásnál a gyorsulási energia

$$\tfrac{1}{2}m(x''^2+y''^2+z''^2)$$

maximum.

Látható, hogy az elv első része az V. alatti egyenletben jut kifejezésre, melyhez ha a gyorsulási energia minimum feltételét kapcsoljuk, a NEWTON-féle differencziálegyenleteket kapjuk, míg ha e helyett a

$$X : Y : Z = x' : y' : z'$$

egyenleteket teszszük fel, a NEWTON-féléktől általában lényeges különböző III') alatti egyenletrendszerhez jutunk.

Zemplén Győző.

---

* KŐNIG GYULA, A dynamika alapegyenleteinek jelentéséről. M. T. Akad. Értekezések a Mathematikai Tudományok köréből. XIV. kötet, 1. sz. 1—43. l., 1883, ismertetve FRÖHLICH IZIDOR Dynamikájának 172—186. lapján.

A TAYLOR-SOR MARADÉKTAGJA.

1. A TAYLOR-sor maradéktagjának SCHLÖMILCH-féle alakja:

$$R_n = \frac{h^n (1-\vartheta)^{n-p} f^{(n)}(a+\vartheta h)}{p(n-1)!},$$

a melyből a LAGRANGE-féle alakját kapjuk e maradéktagnak, ha $p=n$ teszszük és a CAUCHY-félére jutunk $p=1$ esetében.

Jelöljük a maradéktagnak SCHLÖMILCH-féle alakját S_{np}-vel, a hozzátartozó ϑ valódi törtet s_{np}-vel; a LAGRANGE-féle alakot L_n-el és a hozzátartozó ϑ-t l_n-el és megfelelően a CAUCHY-féle alakot C_n-nel, a hozzátartozó valódi törtet pedig c_n-el; akkor

$$S_{np} = \frac{h^n (1-s_{np})^{n-p} f^{(n)}(a+s_{np} h)}{p(n-1)!}$$

és

$$L_n = S_{nn}; \qquad C_n = S_{n,1}.$$

A következő sorokban az l_n és c_n valódi törtekre megközelítő értékeket akarunk meghatározni és kimutatjuk, hogy bizonyos esetekben e valódi törtek n növekedtével 0 felé konvergálnak.

2. Ha az $f(x)$ függvénynek az $a \ldots a+h$ számközre létezik minden differencziálhányadosa az $\overline{n+1}$-ikig bezárólag, akkor $f(a+h)$ a következő két alakban állítható elő:

$$\begin{aligned} f(a+h) &= f(a)+hf'(a)+\frac{h^n f^n(a)}{2}+\cdots+\frac{h^{n-1} f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}+L_n \\ &= f(a)+hf'(a)+\frac{h^n f^n(a)}{2}+\cdots+\frac{h^n f^{(n)}(a)}{n!}+L_{n+1}, \end{aligned}$$

tehát:

$$L_n = \frac{h^n f^{(n)}(a)}{n!} + L_{n+1}, \tag{1}$$

de L_n az említett föltételek mellett a következőképpen fejezhető ki:

$$L_n = \frac{h^n f^{(n)}(a+l_n h)}{n!} = \frac{h^n}{n!}[f^{(n)}(a)+l_n h f^{(n+1)}(a+\vartheta l_n h)],$$

tehát az 1) alatti egyenlet szerint:

$$\frac{l_n h^{n+1}}{n!} f^{(n+1)}(a+\vartheta l_n h) = \frac{h^{n+1} f^{(n+1)}(a+l_{n+1}h)}{(n+1)!},$$

miből:

$$l_n = \frac{1}{n+1} \frac{f^{(n+1)}(a+l_{n+1}h)}{f^{(n+1)}(a+\vartheta l_n h)}. \tag{2}$$

3. Ha $f(x)$ az x $n+1$-edfokú raczionális egész függvénye:

$$f(x) = c_0 x^{n+1} + c_1 x^n + \cdots + c_n,$$

akkor

$$f^{(n+1)}(x) = (n+1)!\, c_0$$

és így a 2) szerint:

$$l_n = \frac{1}{n+1}.$$

4. Ha $f(x)$ $n+1$-ik differencziálhányadosa az $a \ldots a+h$ számközön belül előjelét nem változtatja és abs. értékének felső határa: M, alsó határa: m, akkor a 2) alatti egyenletből következik, hogy:

$$\frac{1}{n+1}\frac{m}{M} < l_n < \frac{1}{n+1}\frac{M}{m}. \tag{3}$$

Így pl.: e^x esetében, ha $a=0$ és h pozitiv, akkor $M=e^h$; $m=1$; tehát

$$\frac{e^{-h}}{n+1} < l_n < \frac{e^h}{n+1}$$

vagyis, ha a MAC-LAURIN sort az n-ik tagnál berekesztjük, a hiba: H

$$\frac{e^{\frac{e^{-h}}{n+1}}}{n!} < H < \frac{e^{\frac{e^h}{n+1}}}{n!}$$

$h=1$ esetében például (minthogy $2 < e < 3$):

$$\frac{2^{\frac{1}{3(n+1)}}}{n!} < H < \frac{3^{\frac{3}{n+1}}}{n!}.$$

Ha az $a \ldots a+h$ számközön belül az $|f^{(n)}(x)|$ felső határa M_n, alsó határa m_n és az $f(x)$ függvény olyan, hogy az $\frac{M_n}{m_n}$ sorozat tagjai egy véges α-nál kisebbek, akkor a 3) alatti egyenlőtlenségből következik, hogy

$$\lim_{n=\infty} l_n = 0.$$

5. A Cauchy-féle maradéktagban szereplő c_n megközelítése a következőképpen eszközölhető:

$$C_n = \frac{(1-c_n)^{n-1} f^{(n)}(a+c_n h)}{(n-1)!} h^n$$

$$L_n = \frac{f^{(n)}(a+l_n h) h^n}{n!},$$

tehát:

$$\frac{(1-c_n)^{n-1} f^{(n)}(a+c_n h)}{(n-1)!} h^n = \frac{f^{(n)}(a+l_n h) h^n}{n!}$$

vagyis:

$$c_n = 1 - \sqrt[n-1]{\frac{1}{n} \frac{f^{(n)}(a+l_n h)}{f^{(n)}(a+c_n h)}}.$$

6. Ha $f(x)$ n-edfokú egész függvény, akkor:

$$c_n = 1 - \sqrt[n-1]{\frac{1}{n}},$$

mely a növekedő fokszámmal csökken és a 0 felé konvergál.

7. Ha az $f^{(n)}(x)$ az $a \ldots a+h$ számközön belül előjelét nem változtatja és felső határa M, alsó határa: m, akkor:

$$1 - \sqrt[n-1]{\frac{1}{n} \frac{M}{m}} < c_n < 1 - \sqrt[n-1]{\frac{1}{n} \frac{m}{M}}.$$

Ha az előbbi jelölést használva $\frac{M_n}{m_n}$ mindig kisebb α nál, akkor

$$\lim_{n=\infty} c_n = 1 - \lim \sqrt[n-1]{\frac{1}{n} \frac{m_n}{M_n}} = 0.$$

A Cauchy-féle ϑ is ez esetben a 0 felé konvergál.

Beke Manó.

A VÉGES CSOPORTOK ELMÉLETÉNEK UJABB IRODALMÁBÓL.

(Negyedik és befejező közlemény.)

VI. Az $X^m = E$ egyenletről.

Ha a csoport rendje n, akkor az I. szakasz szerint a csoport minden eleme kielégiti az

$$X^n = E$$

egyenletet. Az is világos, hogy az

$$X^m = E \tag{1}$$

egyenletnek csak akkor lehet az egységtől különböző megoldása, ha m nem relativ prim n-hez képest. És ekkor tényleg van is az egységtől különböző megoldása. Legyen ugyanis

$$(m, n) = d,$$

akkor (1)-nek megoldásai eleget tesznek az

$$X^d = E \tag{2}$$

egyenletnek és megfordítva. Az (1) és (2) alatti egyenletek tehát æquivalensek. Most már könnyű az előbbi állitásunkat bebizonyitani. Legyen d-nek valamely törzstényezője p, akkor (2)-nek eleget tesznek az

$$X^p = E$$

egyenlet megoldásai is. Hogy ennek az egyenletnek van az egységtől különböző megoldása, azt már Cauchy bizonyította be, ez különben, mint speciális eset, következik a III. szakasz XIV-ből.

A (2) alatti egyenlet megoldásainak számáról FROBENIUS nevezetes tételt mutatott ki.

I. *Az*

$$X^d = E, \quad n \equiv 0 \text{ (mod. } d)$$

egyenlet megoldásainak száma $\equiv 0$ (mod. d). (FROBENIUS.)

A tétel bebizonyításánál teljes indukcziót fogunk használni, még pedig két irányban. Először is a tételt bebizonyitottnak veszszük n-nél kisebbrendű csoportokra, hiszen $n=2$, 3 esetében a tétel evidens. Másodszor pedig a tételt bebizonyitottnak veszszük fel n oly osztóira, melyek d-nél nagyobbak; ezt is tehetjük, mert ha

$$d = n$$

a tétel igaz. Legyen már most

$$d < n$$

és $\frac{n}{d}$-nek tetszőleges törzstényezője p, akkor feltevésünk szerint az

$$X^{dp} = E \tag{3}$$

egyenlet megoldásainak száma kdp. Legyen

$$dp = p^\lambda r, \quad (p, r) = 1.$$

Ha az

$$X^d = E \tag{2}$$

egyenlet megoldásainak száma S, továbbá (3)-nak s számú oly megoldása van, mely (2)-nek nem tesz eleget, akkor

$$S = kdp - s. \tag{4}$$

Az emlitett s számú elem komplexusát jelöljük $\mathfrak{K}$-val.

Tételünk tartalma már most a következő:

$$S \equiv 0 \text{ (mod. } d).$$

Erre nézve elég kimutatni, hogy

$$s \equiv 0 \text{ (mod. } d)$$

vagy pedig a mi ezzel egyértékű:

$$s \equiv 0 \text{ (mod. } p^{\lambda-1}), \quad s \equiv 0 \text{ (mod. } r).$$

Az első állítást könnyű igazolni. A (2) egyenlet olyan, hogy valamely megoldásának hatványai is megoldások. A $\mathfrak{K}$ komplexusba viszont ezek közül csak azon elemek tartoznak, melyeknek rendje p^λ többszöröse. Tehát minden $\mathfrak{K}$-beli elemnek a II. szakasz szerint

$$\varphi(p^\lambda \bar{r}) = \varphi(p^\lambda)\varphi(\bar{r})$$

számú hatványa tartozik ugyancsak $\mathfrak{K}$-ba, ha az illető elem rendje $p^\lambda \bar{r}$. Foglaljuk most a $\mathfrak{K}$ azon elemeit, melyek ugyanazon elemnek hatványai, egy osztályba, akkor oly osztályokat kapunk, melyeknek nincs közös elemük. Minden osztály elemeinek száma $\varphi(p^\lambda)$ többszöröse és így

$$s \equiv 0 \ (\text{mod.}\ \varphi(p^\lambda)),$$

a miből

$$s \equiv 0 \ (\text{mod.}\ p^{\lambda-1})$$

következik. Ha a $\mathfrak{K}$ komplexusnak valamely tetszőleges elemét K-val jelöljük, akkor K a II. szakasz I. szerint egy és csak egyféle módon bontható fel a következőleg:

$$K = PR,$$

a hol P, R egymáshoz kommutativek, P rendje p^λ, R rendje r osztója. Ha tehát

$$P_1, P_2, \ldots, P_i, \ldots \tag{g}$$

a $\mathfrak{H}$ csoportnak összes p^λ-adrendű elemei, akkor a $\mathfrak{K}$ összes elemeit, még pedig mindegyiket egyszer, megkapjuk, ha a (g) alatti összes elemeket szorozzuk a $\mathfrak{H}$ azon Y elemeivel, melyek kielégitik az

$$Y^r = E \tag{5}$$

egyenletet és a melyek az illető P elemmel kommutativek. Ha tehát a (g) elemekhez kommutativ csoportok rendre

$$\mathfrak{H}_{P_1}, \mathfrak{H}_{P_2}, \ldots, \mathfrak{H}_{P_i}, \ldots \tag{h}$$

akkor eljárásunk a következő: minden P_i elemet szorozni kell a $\mathfrak{H}_{P_i}$ csoport azon elemeivel, melyek az (5) egyenletet kielégítik. A P_i hatványai által képezett $\mathfrak{P}_i$ csoport invariáns alcsoportja $\mathfrak{H}_{P_i}$-nek és így létezik a

$$\frac{\mathfrak{H}_{P_i}}{\mathfrak{P}_i}$$

osztálycsoport. Be fogjuk bizonyitani, hogy az (5) egyenletnek ugyanannyi megoldása van $\mathfrak{H}_{P_i}$-ben, mint a mennyi az osztálycsoporton belül. Ugyanis

$$\mathfrak{H}_{P_i} = \mathfrak{P}_i R_0 + \mathfrak{P}_i R_1 + \cdots$$

és $\mathfrak{P}_i$ elemei:

$$P_i, P_i^2, \ldots, P_i^{p^\lambda},$$

már most könnyű kimutatni, hogy a

$$\mathfrak{P}_i R_k$$

komplexusban csak egy oly elem lehet, melynek r-dik hatványa az egység. Ha ugyanis volna

$$(P_i^\alpha R_k)^r = (P_i^\beta R_k)^r = E,$$

akkor ebből következnék, mivel P_i kommutativ R_k-val

$$P_i^{r\alpha} R_k^r = P_i^{r\beta} R_k^r$$

és így

$$P_i^{r\alpha} = P_i^{r\beta},$$

vagyis

$$r\alpha \equiv r\beta \pmod{p^\lambda},$$

de

$$(r, p) = 1,$$

tehát

$$\alpha \equiv \beta \pmod{p^\lambda}.$$

Ha a $\mathfrak{P}_i R_k$ komplexusnak van oly $\overline{R}_k$ eleme, melynek r-dik hatványa az egység, akkor $\mathfrak{P}_i R_k$, mint az osztálycsoport eleme felfogva, oly elem, melynek r-dik hatványa az egység, mert

$$\mathfrak{P}_i R_k = \mathfrak{P}_i \overline{R}_k$$
$$(\mathfrak{P}_i R_k)^r = \mathfrak{P}_i^r \overline{R}_k^r = \mathfrak{P}_i E$$

de $\mathfrak{P}_i E$ az osztálycsoportnak egységeleme. Ha pedig forditva

$$(\mathfrak{P}_i R_k)^r = \mathfrak{P}_i E,$$

akkor ebből következik

$$\mathfrak{P}_i R_k^r = \mathfrak{P}_i,$$

vagyis

$$R_k^r = P^\gamma,$$

de x meghatározható úgy, hogy legyen

$$\gamma \equiv - rx \ (\text{mod. } p^\lambda)$$

a miért is

$$R^r = P^{-rx}$$

$$(P^x R_k)^r = E,$$

és így a $\mathfrak{P}_i R_k$ komplexusban van oly elem, mely mint $\mathfrak{H}_{P_i}$ eleme felfogva, avval a tulajdonsággal bir, hogy r-dik hatványa az egység. Tehát az (5) megoldásainak száma ugyanannyi $\mathfrak{H}_{P_i}$-ben, mint a $\frac{\mathfrak{H}_{P_i}}{\mathfrak{P}_i}$ csoportban. Ezek után könnyű az (5) megoldásainak számát meghatározni. A $\frac{\mathfrak{H}_{P_i}}{\mathfrak{P}_i}$ csoport rendje legyen n_i, mivel $n_i < n$, tételünk erre a csoportra nézve bebizonyított. Ha tehát

$$(r, n_i) = r_i,$$

akkor az (5) megoldásainak száma $\equiv 0$ (mod. r_i), tehát így írható $h_i r_i$. A (g) alatti elemek olyanok, hogy P_i-vel együtt összes konjugáltjai is előfordulnak, hiszen a transzformáczió az elem rendjét meghagyja. Sorozzuk most a konjugált elemeket ugyanabba az osztályba. Akkor a P_i osztályban lévő elemekhez tartozó alcsoportok konjugáltak s így ezekre nézve az n_i, r_i, h_i számok ugyanazok. (Megjegyezzük, hogy ezek az alcsoportok nem mind különbözők.) Mivel a P_i-hez konjugált elemek száma a II. és III. szakaszok szerint $\frac{n}{n_i p^\lambda}$*, azért a P_i osztályából származó $\mathfrak{K}$-beli elemek száma osztható

$$\frac{n}{n_i p^\lambda} r_i = \frac{n}{n_i p^\lambda} (r, n_i)$$

-vel. Azonban

$$(r, p) = 1$$

* És így $\frac{n}{n_i p^\lambda}$ egész szám.

és így

$$\frac{n}{n_i p^\lambda}(r, n_i) \equiv 0 \,(\text{mod.}\, r).$$

Ezt a megfontolást minden osztályra ismételhetjük és így lesz:

$$s \equiv 0 \;(\text{mod.}\; r).$$

Ha az adott csoportról speciális tulajdonságok is ismeretesek, akkor sok esetben a (2) egyenlet megoldásainak számát pontosabban is meghatározhatjuk. Így pl. ABEL-féle csoportok esetében a megoldások pontos száma is könnyen felírható, a mint az a számelméletből is ismeretes.

Bauer Mihály.

A NEGYEDRENDŰ ELSŐFAJÚ TÉRGÖRBÉN LEVŐ PONTKONFIGURÁCZIÓK HELYZETGEOMETRIAI TÁRGYALÁSA.

(Második közlemény.)

Pontquadruplumok a $C_{\mathrm{I}}^{(4)}$-en.

A megelőző fejezetben a többszörösen perspektiv sokszögek egy tipusát: az n-ászt ismertük meg. A jelen fejezet tárgya egy másik tipus legegyszerűbb képviselőjének, a *pontquadruplumnak* vizsgálata.

A megfelelő pontpárokat a kétszeres perspektivitással definiáltuk, vagy a mi ezzel azonos, azzal, hogy a pontjaikban vont érintők ugyanazon húrrendszerhez tartoznak. Kérdés, hány érintő és ezzel hány megfelelő pontpár tartozik egy húrrendszerhez?

Legyen a (g) húrrendszerhez tartozó egyik t_i érintő érintési pontja A_i, a konjugált $(\overline{g})$ húrrendszer egyik tetszésszerinti $\overline{t_j}$ érintőjének érintési pontja $\overline{A}_j$. A $(t_i\,\overline{t_j})$ sik a görbét az $A_iA_i\overline{A}_j\overline{A}_j$ négyszögben metszi: $A_i\overline{A}_j$ tehát önönmagával konjugált húr, vagyis átmegy a polártetraeder egyik csúcsán. Megforditva, ha $\overline{A}_j$ projekcziója valamely kúpos húrrendszerből A_i, úgy $A_i\overline{A}_j$ e húrrendszer egy húrja, vagyis önmagával konjugált: az $A_i\overline{A}_jA_i\overline{A}_j$ négyszög siknégyszög, t_i és $\overline{t_j}$ tehát konjugált érintők. Négy kúpos húrrendszer lévén, világos e szerint, hogy A_i-nek is négy és csak négy helyzete van. Egy húrrendszerhez tehát négy érintő tartozik; érintési pontjaik hat megfelelő pontpárt képeznek. A négy érintési pont összességét pontquadruplumnak, a konjugált húrrendszerekhez tartozó pontquadruplumokat ismét konjugáltaknak nevezzük.

A pontquadruplumra vonatkozó eddig nyert eredményeket a következő tételek fejezik ki:

A $C_{\mathrm{I}}^{(4)}$ egy húrrendszeréhez négy érintő tartozik, e négy érintő érintési pontjai pontquadruplumot alkotnak.

Konjugált húrrendszerekhez tartozó pontquadruplumok konjugáltak; konjugált pontquadruplumok úgy az általunk megállapított, mint közönséges értelemben négyszeresen perspektivek; a projicziáló húrrendszerek a kúpos húrrendszerek; a perspektivitás czentrumai a polártetraeder csúcsai.

Két konjugált pontquadruplum és a polártetraeder e szerint *dezmikus csoportot alkotnak,* melyet az jellemez, hogy a három tetraéder közül bármely kettő az elemi értelemben négyszeresen perspektiv és a perspektivitás czentrumai a harmadik tetraéder csúcsai.

A pontquadruplumnak csupán alakjára új, lényegileg a föntebbivel azonos definicziója: *a pontquadruplum a görbébe írt, önönmagával ugyanazon elrendezésben perspektiv tetraéder.* Ebből következik, hogy *bármely projekcziója is önönmagával ugyanazon elrendezésben perspektiv, tehát szintén pontquadruplum.*

Projicziálja egy tetszésszerinti húrrendszer az $A_1A_2A_3A_4$ pontquadruplumot a $B_1B_2B_3B_4$ pontquadruplumba, olykép, hogy az A_i pontot a B_i pontba projicziálja. Ugyancsak pontquadruplumba projicziálják az A_2-t B_1-be, A_3-at B_1-be és A_4-et B_1-be vetítő húrrendszerek. De a húrrendszert egy hozzátartozó érintő és így a pontquadruplumot egy pontja egyértelmüen határozza meg; az $A_1A_2A_3A_4$ quadruplum vetítésével nyert négy pontquadruplum tehát, a B_1 pontjuk közös lévén, azonos. E szerint *két tetszésszerinti pontquadruplum négyszeresen perspektiv.* Kérdés még, hogy e négyféle perspektivitásban minő sorrendben felelnek meg a két pontquadruplum pontjai?

Tartsuk fenn a pontok olyan jelölését, hogy az egyik perspektivitásban A_i-nek B_i feleljen meg i mind a négy értékénél. Abban a projekczióban, mely A_2-t viszi át B_1-be, A_1-nek B_2 felel meg, mert A_1A_2 önönmagával és B_1B_2-vel lévén perspektiv, A_1A_2 és B_2B_1 is perspektivek; a projicziáló húrrendszer más lévén, mint az első esetben, A_3-nak B_3 nem felelhet meg, kell tehát, hogy A_3 projekcziója B_4, A_4-é B_3 legyen. Ez esetben tehát a perspektiv megfelelés $\begin{pmatrix} A_1A_2A_3A_4 \\ B_2B_1B_4B_3 \end{pmatrix}$.

A másik két eset teljesen analog, a harmadikban B_1 és B_3, B_2 és B_4, a negyedikben B_1 és B_4, B_2 és B_3 felcserélése szolgáltatja $B_1B_2B_3B_4$ keresett permutáczióit.

A dolog természetéből világos, de aritmetikailag is könnyen igazolható, hogy *a négy elrendezés:* $B_1B_2B_3B_4$, $B_2B_1B_4B_3$, $B_3B_4B_1B_2$, $B_4B_3B_2B_1$ *csoportot alkot.*

A négy projicziáló húrrendszer, melyek A_1*-et,* A_2*-t,* A_3*-at és* A_4*-et* B_1*-be projicziálják, azzal a tulajdonsággal bír, hogy a görbe egy tetszésszerinti pontját négy oly pontba viszi át, melyek pontquadruplumot alkotnak.*

A négy kúpos húrrendszeren már előbb fölismertük e tulajdonságot.

Projicziáljuk ugyanis C pontot a négy húrrendszerrel D_1, D_2, D_3, D_4-be; a D pontok jelölését úgy választjuk, hogy B_1A_i és CD_i egy húrrendszerhez tartozzanak.

Legyen továbbá a B_1 pont vetülete az (A) quadruplumot meghatározó húrrendszerből B_1', úgy B_1B_1' húr és a görbe érintője az A_i pontban egy síkban feküsznek: az A_iB_1 és A_iB_1' húrok konjugáltak. Konjugáltak tehát a CD_i és A_iB_1' húrok is; vagyis A_i projekcziója a CB_1' húrból D_i. A $D_1D_2D_3D_4$ négyszög tehát, mint az $A_1A_2A_3A_4$ pontquadruplum vetülete, csakugyan pontquadruplum.

Négy ilyen húrrendszer összességét, a mely egy pontquadruplumot ismét egy pontquadruplumba projicziál, az előbb bebizonyított tulajdonságánál fogva *szintén quadruplumnak nevezhetjük.* Könnyű belátni, hogy a quadruplumot alkotó húrrendszerekhez konjugált húrrendszerek is quadruplumot alkotnak; ugyanis a B_1' pontot, tehát a $B_1'B_2'B_3'B_4'$ pontquadruplumot is az $A_1A_2A_3A_4$ pontquadruplumba projicziálják.

Az $A_1A_2A_3A_4$ *pontquadruplum bármely pontquadruplummal négyszeresen perspektiv: négyszeresen perspektiv* tehát *önönmagával is. A négyféle perspektiv helyzet:*

$$\begin{pmatrix} A_1A_2A_3A_4 \\ A_1A_2A_3A_4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} A_1A_2A_3A_4 \\ A_2A_1A_4A_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} A_1A_2A_3A_4 \\ A_3A_4A_1A_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} A_1A_2A_3A_4 \\ A_4A_3A_2A_1 \end{pmatrix}.$$

Világos innen, az $A_1A_2A_3A_4$ *tetraeder szemben fekvő élei ugyanazon húrrendszerekhez tartoznak. E húrrendszerek a pontquadruplumot meghatározó húrrendszerrel együtt quadruplumot alkotnak.*

Ha az A_1 pont simulópontja A_1^*, úgy az AA_1^* simulósugár és a pontquadruplum bármelyik, pl. A_2 pontjában vont érintő konjugált húrok, konjugáltak tehát A_1A_2 és $A_1^*A_2$ és így A_3A_4 és $A_1^*A_2$ is, tehát az $A_1^*A_2A_3A_4$ négyszög síknégyszög. E szerint:

A pontquadruplum három pontjának kisérő pontja a negyedik pont simulópontja.

Minthogy továbbá a négy simulópont a pontquadruplum pontjainak projekeziói érintőikből vagyis ugyanazon húrrendszerből, azért *valamely pontquadruplum négy pontjának simulópontjai szintén pontquadruplumot alkotnak.*

Legyenek $A_1A_2A_3A_4$ és $B_1B_2B_3B_4$ két pontquadruplum; vetítse az $A_1A_2A_3A_4$ pontquadruplumot meghatározó húrrendszer B_1B_2 B_3B_4-et a $C_1C_2C_3C_4$ pontquadruplumba. Az $A_1A_2A_3A_4$ tetraeder élei és a csúcsaiban a $C_I^{(4)}$-hez vont érintők által meghatározott négy húrrendszer quadruplumot alkot és így a B_1 pontot egy pontquadruplum pontjaiba vetíti, melynek egyik pontja C_1, mint B_1-nek az A pontokhoz tartozó érintőkből való vetülete, e pontquadruplum tehát azonos a $C_1C_2C_3C_4$ pontquadruplummal.

Ugyanígy projicziálja a négy húrrendszer B_2, B_3, B_4 pontokat is a $C_1C_2C_3C_4$ quadruplumba. E szerint:

Ha egy pontquadruplum minden pontján át meghúzzuk egy másik pontquadruplumtól alkotott tetraéder szemben fekvő éleinek közös szelőit, az így nyert 12 egyenes hármasával a görbe négy pontjában találkozik; e négy pont quadruplumot alkot, mely egyszersmind az első quadruplumnak a másodikat meghatározó húrrendszerből való projekcziója.

Fölmerülhet még a kérdés, vajjon két pontquadruplum nyolcz pontja képezhet-e Reye-féle csoportot és ha igen, minő feltételek mellett? Könnyen beláthatjuk, hogy a probléma lényegileg független a quadruplum jellegtől. Ha ugyanis az $A_1A_2A_3A_4$ és $B_1B_2B_3B_4$ pontquadruplumok együtt REYE-féle csoportot képeznek, úgy ismét REYE-féle csoportot nyerünk, ha az A_iB_i egy húrrendszerhez tartozó húrokat e húrrendszer tetszésszerinti négy húrjával helyettesítjük. A két pontquadruplumot egymásba projicziáló húrrendszerek bármelyikének tehát azon tulajdonsággal kell birnia, hogy egy tetszésszerinti hozzátartozó AB húr négyszeresen számitott végpontjai REYE-féle csoportot képeznek. De mivel a háromszorosan számitott A és B pontok A^* és B^* simulópontjaikkal együtt, mint két siknak a $C_I^{(4)}$-gyel közös pontjai, REYE-féle csoportot alkotnak, az AB és A^*B^* húroknak egy húrrendszerhez kell tartozniok. A kérdés most az, mely húrrendszerek birnak ily tulajdonsággal, hogy t. i. a húrjaik végpontjainak simulópontjait összekötő húrok ismét a rendszerhez tartoznak? Válaszszuk az A pontot a $C_I^{(4)}$ egy inflexiós pontjában, vagyis egy olyan pontban, mely simulópontjával egybeesik, akkor evidens, hogy B^* is egybeesik B-vel, tehát hogy B is inflexiós pont.

A keresett húrrendszerek tehát olyan természetűek, hogy inflexiós pontot ismét inflexiós pontba projicziálnak. Viszont az ilyen húrrendszerek mind megfelelnek a feladatnak, mert két 4-szeresen számitott inflexiós pont REYE-féle csoportot képez. Mint később látni fogjuk, a görbének 16 inflexiós pontja van, melynek összekötő húrjai 16 különböző húrrendszerhez, köztük a négy kúpos húrrendszerhez tartoznak. A feladatnak ez a 16 húrrendszer felel meg; a feladat természetéből következik, hogy e húrrendszerek négyesével egy-egy quadruplumot alkotnak.

Projicziálások összetétele; a kétszeri projicziálások csoportja; Steiner-féle zárási problemák a $C_I^{(4)}$-en.

STEINER a Crelle's Journal 32. kötetében (Geometrische Lehrsätze etc.) bebizonyitás nélkül adta a róla elnevezett záródási tételeket abban a primitiv specziális alakban, mely csupán harmadrendű síkgörbékre szól és tetszőlegesen választott húrrendszerek helyett két váltakozó húrrendszert vesz csak tekintetbe.

A problemát utána KÜPPER[1] és SCHOUTE[2] tárgyalják geometriailag, mindketten ugyanazon a harmadrendű síkgörbékre alapvető tételből indulva ki, hogy ha két háromszög oldalainak metszéspontjai közül nyolcz egy harmadrendű síkgörbén fekszik, úgy rajta fekszik a kilenczedik is.

CLEBSCH alapvető munkájában[3] a K^3-on és a $C_I^{(4)}$-en oly koordináta megállapodásokat létesít, mely megállapodások analogiája e görbék konfiguráczióinak analógiájára minden geometriai megfontolásnál világosabban rámutat; másrészt e megállapodások által a görbe pontjai közötti összefüggések igen egyszerű és könnyen áttekinthető analitikai kifejezést nyervén, ez összefüggések elméletének kibővítése most már gyorsabban és szélesebb mederben haladhat előre. CLEBSCH dolgozatával e görbék elmélete szinte be volna tetőzve; a geometrának csak a módszertani feladat jut: a más úton megismert tételek rendszerét *geometriai alapon* fölépíteni.

A CLEBSCH-féle dolgozatot csakugyan követi a STEINER-féle tételek általánosítása kétféle irányban: egyrészt az analog tételek fölállítása a két kettős ponttal bíró negyedrendű síkgörbére és a $C_I^{(4)}$-re[4]; másrészt két váltakozva ismétlődő projicziáló húrrendszer helyett tetszésszerint adott húrrendszerek bevezetése.

A STEINER-féle problema lényegében azoknak a föltételeknek keresését kivánja, melyek mellett a pontok egy bizonyos sorozata, melyekből mindegyik az előzőnek egy adott húrrendszerrel való projekcziója, önmagába visszatér. A problema tehát elsősorban a *projicziálások összetételének* vizsgálatára utal.

Ha a projicziálást mint olyan műveletet tekintjük, mely a görbét önönmagába képezi be, úgy két projicziálás összetétele is önmagába képezi le a görbét. A kérdés, mely elsősorban fölmerül az, vajjon ez a leképezés ismét projicziálás-e? A válasz tagadó. Ha ugyanis két projicziálás összetétele általában pojicziálás

[1] KÜPPER, Math. Annalen, Bd. 24. S. 1—4. (1883).
[2] SCHOUTE, Crelle's J. Bd. 95. S. 105., S. 320. (1883).
[3] CLEBSCH, Crelle's J. Bd. 63. S. 94. (1864).
[4] WEYR, Crelle's J. Bd. 73; SCHUR, Math. Annalen, Bd. 20. S. 262. (1882).

volna, akkor speczialisan projicziálás volna egy projicziálás megismétlése is, mely transzformáczió pedig a görbe minden pontját önönmagába viszi át; de egy projicziálás a görbének csak négy pontját viheti át önönmagába. A *projicziálások* tehát *nem alkotnak csoportot.*

Ezzel a $C_I^{(4)}$ pontjainak egy *új, a projicziálástól különböző transzformáczióját* ismertük meg, mely két projicziálás összetevéséből származik.

A legközelebbi feladat e transzformáczió tulajdonságainak vizsgálata.

Ha a $P'P$ transzformáczió az **A** és **B** pontokat $\mathbf{A}_1$-be és $\mathbf{B}_1$-be viszi át, akkor a transzformáczió definicziójából világos, hogy az **AB** és $\mathbf{A}_1\mathbf{B}_1$ pontpárok ugyanazon — az átmenetet képező — pontpárral perspektivek: perspektivek tehát **AB** és $\mathbf{B}_1\mathbf{A}_1$ is, vagyis az $\mathbf{AB}_1$ és $\mathbf{BA}_1$ húrok ugyanazon húrrendszerhez tartoznak. E szerint *két megfelelő pont megadása már jellemzi a transzformácziót;* mert ha az **A** és $\mathbf{A}_1$ pontokat ismerjük, akkor *egy tetszésszerinti* **B** *pont megfelelője az* **A** *pont projekcziója a* **B** *pontot* $\mathbf{A}_1$ *pontba vetítö húrrendszerrel.*

A transzformáczió e szerint csak az összetevő projicziálások összességétől függ, *az összetevő projicziálásoktól egyenkint független.* Mert egy tetszésszerinti P_1 projicziáláshoz mindig találhatunk egy oly P_1' projicziálást, hogy a $P_1'P_1$ transzformáczió az **A** pontot $\mathbf{A}_1$-be vigye át; ha ugyanis **A** projekcziója P_1-gyel **A'**, úgy P_1' az a projicziálás, mely **A'**-t $\mathbf{A}_1$-be vetíti. De ez a $P_1'P$ transzformáczió, mint az **A** és $\mathbf{A}_1$ pontok által teljesen meghatározott, azonos a $P'P$ transzformáczióval.

Az eddig projicziálások összetétele által definiált $P'P \equiv Q$ transzformácziónak a föntebbi összefüggés alapján most már új definicziót is adhatunk, *Q-transzformácziónak nevezvén az olyan transzformácziót, mely a görbe minden* **AB** *pontpárját oly* $\mathbf{A}_1\mathbf{B}_1$ *pontpárba viszi át, hogy* **AB** *és* $\mathbf{B}_1\mathbf{A}_1$ *perspektivek.*

A Q-transzformácziók vizsgálatánál a legközelebbi kérdések, hogy minő transzformácziót szolgáltat három projicziálás, vagyis egy Q és egy P transzformáczió és minőt négy projicziálás, tehát két Q-transzformáczió összetétele. Ha Q az A és B pontokat A_1-be és B_1-be, P pedig A_1-et és B_1-et A_2-be és B_2-be viszi át, akkor A_1B_1 perspektiv BA-val és A_2B_2-vel, tehát AB és A_2B_2 is perspektivek, a PQ müvelet e szerint projicziálás, hasonlókép projicziálás QP is. Két Q-transzformáczió összetétele, mint egy PQ és egy P-transzformáczió vagyis két projicziálás összetétele, ismét Q-transzformáczió. E szerint tehát *páratlan számú projicziálás összetétele projicziálás, páros számúé Q-transzformáczió.*

Két Q-transzformáczió összetétele ismét Q-transzformáczió lévén, *e transzformácziók csoportot alkotnak. A csoport kommutativ,* mert ha Q_1 az A pontot A_1-be, Q_2 A_1-et A_2-be, Q_2 A-t az A_3-ba viszi, úgy AA_1 és A_2A_3 perspektivek: perspektivek tehát AA_3 és A_2A_1 is; tehát Q_1, mely A-t A_1-be viszi, A_3-at A_2-be viszi át; vagyis a Q_2Q_1 és Q_1Q_2 transzformácziók A pontot ugyanazon A_2 pontba transzformálják; tehát csakugyan $Q_2Q_1 \equiv Q_1Q_2$.

Minden Q-transzformáczióhoz tartozik egy Q^{-1} inverz transzformáczió, melyre $Q^{-1}Q \equiv QQ^{-1} \equiv 1$; 1-gyel jelölve az *egységtranszformácziót,* vagyis azt a transzformácziót, mely minden pontot önönmagába visz át. A projicziálás involutorikus müvelet lévén, világos hogy, ha $Q = P'P$ úgy $Q^{-1} = PP'$.

Az inverz Q^{-1} transzformáczió fontos tulajdonsága, hogy egyszersmind konjugált is oly értelemben, hogy a P-hez és a P'-höz konjugált $\bar{P}$ és $\bar{P}'$ projicziálások összetétele. Ha ugyanis a $P'P$ az A pontot A_1-en át A_2-be, $\bar{P}\bar{P}'$ $\bar{A}_1$-en át $\bar{A}_2$-be viszi, úgy AA_1 és $\bar{A}_1\bar{A}_2$, A_1A_2 és $A\bar{A}_1$ konjugált húrok párjai: az $AA_1\bar{A}_1\bar{A}_2$ és $AA_1A_2\bar{A}_1$ négyszögek síknégyszögek, melyeknek három csúcsuk, tehát a negyedik is közös: A_2 identikus $\bar{A}_2$-vel; vagyis $P'P \equiv \bar{P}\bar{P}'$.

*

Adva lévén tehát P_1, P_1'; P_2, P_2'; ...; P_n, P_n' projicziálások, ezek összetétele

$$P_n' P_n \dots P_2' P_2 P_1' P_1 = Q_n \dots Q_2 Q_1$$

ismét Q-transzformáczió, mely ha a görbe egy tetszésszerinti pontját önönmagába viszi át, úgy

$$Q_n \dots Q_2 Q_1 = 1;$$

vagyis minden pontot önönmagába visz át. Egyszersmind a konjugált projicziálások összetétele is:

$$Q_n^{-1} \dots Q_2^{-1} Q_1^{-1} = 1.$$

Adva lévén másrészt $2n+1$ projicziálás:

$$P_1, P_1', \dots, P_n, P_n', P_{n+1},$$

úgy ezek összetétele ismét projicziálás; e projicziálások összetétele tehát az egyes projicziálások tetszésszerinti választása mellett a $P_{n+1} P_n' P_n \dots P_1' P_1$ projicziálás kettőspontjait viszi át önönmagukba, vagyis egy pontquadruplum négy pontját.

Kimutatom még, hogy *a P_i projicziálásoknak önönmaguk közötti és a P_i' projicziálásoknak önönmaguk közötti permutácziója az eredő műveleten nem változtat.* Ennek igazolására elég kimutatnunk, hogy $P_2 P_1' P_1 \equiv P_1 P_1' P_2$

De mivel a Q-transzformácziók csoportja kommutativ, azért

$$P_2' P_2 P_1' P_1 \equiv P_1' P_1 P_2' P_2;$$

mindkettőre a P_2' projicziálást alkalmazván, mivel $P_2' P_2' \equiv 1$:

$$P_2 P_1' P_1 \equiv P_2' P_1' P_1 P_2' P_2 \equiv P_1 P_2' P_2' P_1' P_2 \equiv P_1 P_1' P_2;$$

a két projicziálás tehát csakugyan azonos.

Ezzel a Steiner-féle tételeket legáltalánosabb alakjukban mondhatjuk ki:

1. *Ha a $P_1, P_2, \dots, P_n$ és $P_1', P_2', \dots, P_n'$ projicziálások egy oly összetétele, melyben a P-k és a P'-ök fölváltva következnek egymásra, a $C_1^{(4)}$ valamely pontját önönmagába viszi át, úgy e projicziálások mind a $2(n!)^2$ ilyen összetétele a görbe minden pontját önönmagába viszi át.*

Ugyancsak önönmagába viszi át a görbe minden egyes pontját a konjugált projicziálások minden analog összetétele is.

A projicziálásoknak ilyen tulajdonsággal biró rendszerét, illetőleg a belőlük képezett Q-transzformácziók rendszerét Steiner-féle rendszernek nevezzük.

2. *A páratlan számú $P_1, P_2, \dots, P_{n+1}, P_1', P_2', \dots, P_n'$ projicziálások egy rendszeréhez mindig négy olyan pont tartozik,*

melyet e projicziálásoknak olyan összetétele, melyben a P-k és P'-k fölváltva következnek egymásra, önönmagukba visz át; e négy pont egy pontquadruplumot alkot.

*

Érdekes még annak a csoportnak a vizsgálata, melyet egy Q-transzformáczió hatványai alkotnak. A Q-transzformáczió másodsorban adott definicziója azonnal e csoportnak egy oly tulajdonságára vezet, melylyel részben már járt talajra ismerünk. Jelöljük ugyanis azt a pontot, melybe a Q_k transzformáczió az A_0 pontot átviszi, A_k-val; úgy a Q^i transzformáczió az A_{k_1} és A_{k_2-i} pontokat A_{k_1+i}-be és A_{k_2}-be transzformálja: $A_{k_1}A_{k_2}$ és $A_{k_1+i}A_{k_2-i}$ ennélfogva egy húrrendszerhez tartoznak. Ebben az n-ászok jellemző tulajdonságára ismerünk; ez a tulajdonság tényleg azonos az n-szeres perspektivitással akkor, ha az A pontok száma véges, ha tehát található oly n pozitiv egész szám, hogy $Q^n \equiv 1$ és $Q^{m} \mp 1$, m-nek minden n-nél kisebb pozitiv értékénél.

Az n-ászoknak k-ászokra való bontása e tárgyalásban mindazon mod. n inkongruens r számok keresésére utal, melyekre nézve $(n, r) = \frac{n}{k}$. Az ilyen r számokra nézve ugyanis $Q^{kr} \equiv 1$, de $Q^{hr} \mp 1$, ha h k-nál kisebb pozitiv szám. Ezen r számokat $\frac{n}{k}$-nak a k-val relativ prím számokkal való szorzása szolgáltatja: számuk tehát $\varphi(k)$. Ezek közül kettő-kettő, melynek összege n, ill. n többszöröse, lényegileg egynek tekintendő. Ilykép ismét találjuk, hogy az n-ászból kiválasztott lényegesen különböző k-ászok száma: $\frac{1}{2}\frac{n}{k}\varphi(k)$.

*

Az általánosabb kérdés, vajjon mi jellemzi a Q-transzformácziók véges csoportjait, az imént tárgyaltra vezethető vissza. A csoport definicziójából következik, hogy a csoport tagjainak hatványai is a csoportba tartoznak; a csoport tehát úgy lehet véges, ha bármely transzformácziójának az egységtranszformáczió véges kitevőjű hatványa; a csoport e szerint különböző módokon n-ászokat létrehozó, vagyis hatványcsoportokra bontható.

További vizsgálat tárgyát képezheti még a görbe oly véges pontcsoportjának keresése, melyet a Q-k egy véges csoportjának bármely tagja önmagába transzformál.

Az ilyen pontcsoportról azt mondjuk, hogy az illető Q csoporthoz tartozik. Evidens ismét, hogy az ily csoport különböző n-ászokból áll. Ilyen csoportot nyerünk, ha a görbe egy tetszésszerinti pontjára a Q-csoport összes transzformáczióit alkalmazzuk. Világos, hogy a Q-csoporthoz tartozó minden pontcsoportnak így származtatott csoportokból kell állania. Ilykép a Q-csoporthoz tartozó egyszerű és összetett pontcsoportokat különböztetünk meg.

Az ilyen pontcsoportoknak jellemző tulajdonsága, hogy tetszésszerinti Q-transzformáczióval ismét az illető Q-csoporthoz tartozó pontcsoportba mennek át. Mert ha A_i és A_j az első csoport két pontja és A'_i és A'_j a leszármaztatott csoport megfelelő pontjai, akkor a Q-transzformácziók kommutativ jellegéből evidens, hogy A_i-t A_j-be és A'_i-t A'_j-be ugyanazon transzformáczió viszi át.

Érdekes tulajdonságuk még e pontcsoportoknak, hogy bizonyos projicziálások is önönmagukba viszik át, vagyis hogy önmagukkal perspektivek.

Mert ha egy Q-transzformáczió az A_i és A_j pontokat ismét a csoport két pontjába, A'_i-be és A'_j-be viszi, úgy az A_i-t A'_j-be projicziáló húrrendszer A_j-t A'_i-be projicziálja.

Ily pontcsoportok érdekes példája a $C_{\mathrm{I}}^{(4)}$ inflexiós pontjainak csoportja.

Inflexiós pontok. Pontok, melyekben másodrendű felületek a görbét nyolcz pontulag érintik.

A $C_{\mathrm{I}}^{(4)}$ ama pontjait, a melyek simuló pontjukkal összeesnek, vagyis a melyekben a simulósík négy pontulag oszkulál, a görbe *inflexiós pontjainak* nevezzük. Evidens, hogy *az ilyen pontokban az érintő,* mivel egyszersmind simulósugár, önönmagával konjugált, vagyis *a kúpos húrrendszerek egyikéhez tartozik.* Viszont a négy kúpos húrrendszertől meghatározott négy pontquadruplum pontjainak bármelyikében az érintő önmagával konjugált lévén, egyszersmind simuló sugár; a pont tehát inflexiós pont. A *görbének* eszerint *16 inflexiós pontja van, t. i. a négy kúpos pontquadruplum 16 pontja.*

E kúpos húrrendszerhez tartozó pontquadruplum kiváló tulajdonsága, hogy pontjai egy síkban: a polártetraéder egy lapjában feküsznek.

Ugyanis $M_1M_2M_3M_4$ polártetraéder egyik, pl. M_1 csúcsából az F^2-sor felületeihez vont érintő kúpok e felületeket azon kúpszeletsor egyedeiben érintik, melyben az $[M_2, M_3, M_4]$ sík a felületsort metszi. Az M_1-ből a görbéhez vont érintők négy érintés-pontja a kúpszeletsor négy alappontja, vagyis az $[M_2, M_3, M_4]$ síknak a görbével való négy metszéspontja; ezek tehát az M_1-en átmenő kúpos húrrendszerhez tartozó pontquadruplum pontjai.

A kúpszeletsor közös polárháromszöge és így egyszersmind a négy alappont által alkotott négyszög átlóháromszöge az $M_2M_3M_4$ háromszög. A quadruplum pontjai tehát oly tulajdonságúak, hogy bármely kettőt összekötő egyenes — ideszámítva az érintőt is — a polártetraeder egyik csúcsán megy át. Könnyen beláthatjuk ezt más úton is, ha tekintetbe vesszük, hogy valamely pontquadruplum projekcziója bármely kúpos húrrendszerből a konjugált pontquadruplum, és hogy a legutóbb definiált pontquadruplum önönmagához konjugált.

Érdekes tulajdonságuk az inflexiós pontoknak, hogy *bármely háromnak kísérő pontja ismét inflexiós pont.* Legyen ugyanis I_1, I_2, I_3 három tetszésszerinti inflexiós pont, kísérőpontjuk B. Az I_1, I_2, I_3, B pontok egy síkban feküdvén, simulópontjaik I_1, I_2, I_3, B * is egy síkban feküsznek, **B** és B * tehát összeesnek: **B** pont inflexiós pont.

Az imént megismert tétel ama síkok konfigurácziójának tanulmányozására vezet, a melyek mindegyikében négy inflexiós pont fekszik. Ismerünk első sorban 16 oly síkot, az inflexiós simulósíkokat, melyekben mind a négy inflexiós pont összeesik.

Olyan sík, melyben két pár pont esik össze, mely tehát két egy csúcshoz tartozó érintőt tartalmaz, csúcsonként a négy érintőnek megtelelően 6, összesen tehát 24 van.

Oly sik, melyben csak két pont esik egybe, míg a másik kettő különböző, egy érintőn és egy ugyanazon csúcshoz tartozó nem érintő húron megy át. Az ily sikok száma tehát csúcsonként $6.4=24$, összesen 96.

Bennünket a konfigurácziό szempontjából inkább azok a sikok érdekelnek, a melyek négy különböző inflexiós ponton át fektethetők. Az ilyen síkokat három osztályba oszthatjuk.

Az első osztályba tartoznak azok, a melyekben fekvő négy inflexiós pont közül kettő a polártetraéder ugyanazon lapjába esik. Az összekötő húr ekkor átmenvén az egyik csúcson, a másik két pontot összekötő húrnak is ezen a csúcson kell átmennie: e két pont is a tetraeder egy lapjába esik. Minden csúcson át $\binom{6}{2}=15$ ilyen sík fektethető, köztük a tetraéder három oldalsíkja. A polártetraeder négy oldalsíkján kivül tehát 48 ilyen sík létezik.

A második osztályba soroljuk azon síkokat, a melyeknek mind a négy pontja a polártetraeder más-más lapján fekszik. Mivel a fentebb tárgyalt sikok között nincs olyan, melynek három pontja a polártetraéder három különböző lapjába esnék, evidens, hogy három lapon egy-egy pontot tetszésszerint választván, az ezeken átfektetett síknak még egy a negyedik lapon fekvő inflexióspon ton kell átmennie. Ilyen sík tehát $4^3=64$ fektethető.

Végre a harmadik kategoriába a polártetraéder négy oldalsíkja tartozik.

A 16 inflexiós pont közül tehát összesen 116-féleképen lehet négy különbözőt úgy kiválasztani, hogy a kiválasztott négy pont egy síkban feküdjék.

Felmerül már most a kérdés, hogy e sikok közül hányféleképp lehet oly négyet kiválasztani, hogy kettő ne menjen át ugyanazon inflexiós ponton, vagyis hogy hány oly tetraéder létezik, melyeknek négy oldalsíkja együtt mind a 16 pontot tartalmazza? E tetraederek közül egyet — a polártetraédert — már ismerünk.

E tetraederek megszámlálását SCHRŒTER* geometriai, LANGE** pedig analitikai úton végezte, mindketten 745 ily tetraedert találtak. Vizsgálataik reprodukálását e helyen mellőzöm.

*

Az inflexiós pontok tulajdonsága, hogy három tetszésszerintinek kisérő pontja is inflexiós pont, csoportelméleti szempontból tekintve is fontos jelenséget képez. Legyen ugyanis pl. I_1 egy inflexiós pont, g két tetszésszerinti különböző vagy egybeeső inflexiós pontot egybekötő húr, ill. érintő. Az $[I_1, g]$ sík a görbét még egy I_i inflexiós pontban metszi: I_1I_i és g tehát konjugált húrok. Ha továbbá az $I_1I_1I_i$ háromszög kisérő pontja az I_j inflexiós pont, úgy I_1I_j és g ugyanazon húrrendszerhez tartoznak. Az I_1 pontot a 16 inflexiós ponttal (önmagával is) összekötő húrok (ill. érintő) e szerint azon összes húrrendszereket képviselik, melyekhez a 16 pontot összekötő húrok tartoznak. E húrrendszerek száma tehát 16. Az I_1 ponton át vont húrok közül négy átmegy a polártetraeder egy-egy csúcsán, tehát önmagával konjugált; a többi 12 párjával konjugált. E szerint:

16 oly húrrendszer van, mely a 16 inflexiós pont csoportját önönmagába vetíti: a négy kúpos húrrendszer és 6 a $C_I^{(4)}$-en átmenő F^2 2—2 alkotórendszere.

Evidens még, hogy ugyancsak *16 olyan Q-transzformáczió van, mely az inflexiós pontok csoportját önmagába viszi át.*

Az inflexiós pontok csoportjából projicziálás útján az önmagukkal és egymás közt 16-szorosan perspektiv 16-os pontcsoportoknak egy dimenziós sorozatát származtathatjuk le. Könnyen belátható még, hogy *16 ilyen pont négy, egy quadruplumot alkotó húrrendszerhez tartozó négy pontquadruplum pontjai.*

*

Ha A a $C_I^{(4)}$ egy tetszésszerinti pontja, úgy az összes a $C_I^{(4)}$-et A-ban 7-pontúlag oszkuláló másodrendű felületek a $C_I^{(4)}$-et még egy

* SCHROETER, Theorie der Raumkurve 4. O. etc.

** LANGE, Die 16 Wendeberührungspunkte der Raumkurve 4. O. I. Sp Schlömilch's Zeitschrift, Jahrg. 28. S. 1. u. 65.)

A^{**} pontban metszik: a 7-szeresen számított A pont és az A^{**} pont együtt egy Reye-féle 8-as csoportot képeznek. A^{**} pont általában különbözik A-tól. Kérdés, mikor esik vele egybe? vagyis *melyek azok a pontok, melyekben a görbét nyolcz pontúlag oszkuláló 2-rendű felület fektethető?* Vagy még máskep fogalmazva, melyek 8-szorosan számítva, Reye-féle csoportot adnak?

Minthogy a 2-szeresen számított simulósík szintén Reye-féle csoportot metszi ki a görbéből, és a két rendszerben a 6-szorosan vett A pont közös, kell, hogy az A-ban és az A^* simulópontban vont érintők egy húrrendszerhez tartozzanak. Minthogy AA^* húr az A-ban vont érintőhöz konjugált, konjugált az A^*-ban vont érintőhöz is: A és A^* egymásnak kölcsönösen simuló pontjai. Legyen I a görbe egy tetszésszerinti inflexiós pontja, B az AA^*I háromszög kisérőpontja, B simuló pontja pedig B^*; úgy az $A_1A^*_1$, I és B pontok A_1^*, A_1, I, B^* simuló pontjai is egy síkban feküsznek: B identikus B^*-gal: tehát inflexiós pont: az IB húr és az A pontban vont érintő konjugáltak az AA^* húrhoz: tehát egy húrrendszerhez tartoznak. A bizonyitás megfordítható; könnyen kimutathatjuk, hogy *két inflexiós pontot összekötő húr húrrendszeréhez tartozó pontquadruplum pontjai eleget tesznek a fentebbi követelésnek. A 16 húrrendszer összesen 64 ilyen pontot határoz meg, köztük 16 inflexiós pontot; ezek leszámításával 48 pont marad, melyek mindegyikében lehetséges a 8-pontú oszkuláczió.*

Ezt a 48 pontot *másodrendű inflexiós pontoknak* nevezzük.

Riesz Frigyes.

A POLÁROZOTT FÉNY INTERFERENTIÁJA TÖRVÉNYEINEK KISÉRLETI BEMUTATÁSA.*

(Első közlemény.)

1. §. A polározott fény interferentiája tapasztalati törvényei.

FRESNEL és ARAGO az 1816. és 1819. években megállapitották a polározott fény interferentiája tapasztalati törvényeit; ezek a következők:**

I. Egymáshoz párhuzamos síkokban polározott fénysugarak úgy interferálnak, mint természetes fénysugarak.

II. Egymásra merőleges síkokban polározott fénysugarak nem interferálnak.

III. Természetes sugárnyalábból származó, egymásra merőlegesen polározott két sugár még akkor sem interferál, ha egy és ugyanazon polározási síkra lesz visszavezetve.

IV. Síkban polározott sugárnyalábból származó, egymásra merőlegesen polározott két sugár interferál, ha egy és ugyanazon polározási síkra lesz visszavezetve.

---

* Előadva a Mathematikai és Physikai Társulat 1902. évi november hó 6-án tartott rendes ülésében.

** V. ö. pl.: F. ARAGO: Oeuvres complètes, T. X; Paris (I. kiadás 1858), p. 148, 149; A. FRESNEL: Oeuvres complètes, T. I., Paris, 1866, p. 521, 522; — továbbá: E. MASCART: Traité d'Optique, T. I., Paris, 1889, p. 533; — F. NEUMANN: Vorlesungen über theoretische Optik, herausgegeben von E. DORN, Leipzig, 1885, p. 123; — P. DRUDE: Lehrbuch der Optik, Leipzig, 1900, p. 228; — W. VOIGT: Kompendium der theoretischen Physik, Bd. II, Leipzig, 1896, p. 538, 539; — A. WINKELMANN: Handbuch der Physik, Bd. II, 1 Breslau, 1894, p. 631—633; — W. HERSCHEL: Vom Licht; fordította E. SCHMIDT, Stuttgart und Tübingen, 1831, p. 521—535.

V. Ezen utóbbi esetben az interferáló sugarak fényes vagy sötét középső csikot szolgáltatnak a szerint, a mint az utolsó polározás síkja az első polározás síkjához párhuzamos vagy arra merőleges.

2. §. A törvények jelentősége; a jelen közlemény czélja.

E törvények a polározott fény jelenségeinek complexumában a legnagyobb fontosságuak; mert egyrészt a kristálylemezeknek polározott fényben mutatkozó, bámulatos változatosságú jelenségei megérthetésének kulcsát képezik, másrészt a polározott, valamint belőle folyólag a természetes fényre vonatkozó felfogásunk tárgyában az első két törvényből kényszerítő szükségességgel következik, hogy a síkban polározott sugár fényvectora a sugár továbbterjedési irányára merőleges egyenesben fekszik, melynek vagy a polározás síkjában levőnek vagy erre merőlegesnek kell lenni.

Ezen okoknál fogva felette kivánatos, hogy a fentidézett törvények egyszerű, egyenes kisérletekkel kifogástalan módon és oly alakban legyenek igazolhatók, hogy segélyükkel még a kezdő is közvetetlen meggyőződést szerezhessen a törvények helyességéről.

Ezért is az eddig ismert ily kisérletek összefoglaló rövid áttekintése és méltatása után oly kisérleti berendezést szabadjon itt leirnom, mely a nevezett czélra teljesen alkalmas s az eddigi eljárások tökéletlenségeitől ment.

Ehhez legyen szabad tetszőlegesen polározott fénysugarak interferáltatására alkalmas egyszerű, új, de általános módszert bemutatni.

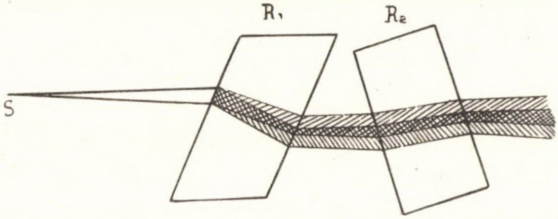
I. A régebbi kisérletek körvonalai.

3. §. Az első kisérletek. Az első törvény igazolása.

Úgy látszik, a szóban forgó kisérletekkel legelőször foglalkoztak F. Arago és A. Fresnel, kiknek e tárgyra vonatkozó kisérletei közül a leglényegesebbek a következők: * Az első törvényt egyszerüen úgy mutatták ki, hogy bármily interferentia-jelenséget létesitő berendezésnél fényforrásúl síkban polározott fényt alkalmaztak; a jelenség interferentiális sajátságai ugyanazok maradtak, mint természetes fényben.

4. §. A második törvény igazolása kettős törés alapján.

FRESNEL** mészpát rhomboëder kettémetszése által létesitett egyenlő, párhuzamos lapú két mészpátot úgy helyezett el, (1. ábra) hogy főmetszeteik egymásra merőlegesek voltak; valamely pont-



1. ábra.

szerű fényforrásból induló, ezeken keresztül haladott sugarak közös terében kereste az interferentia csikok rendszerét.

---

* A kisérletek részben ARAGÓtól, részben FRESNELtől, részben közösen mindkét physikustól származnak; az ezeket tartalmazó közlemények:

1. FRESNEL neve alatt megjelent értekezés:

«Mémoire sur l'influence de la polarisation dans l'action que les rayons lumineux exercent les uns sur les autres.»

FRESNEL, Oeuvres T. I., Paris 1866, p. 385—409, keltezve 1816. évi aug. hó 30-áról; és p. 410—439, keltezve 1816. évi október hó 6-áról; e két közlemény egy és ugyanazon értekezésnek egymástól némileg eltérő két szövege.

2. ARAGO és FRESNEL neve alatt megjelent értekezés:

«Mémoire sur l'action, que les rayons de lumière polarisée exercent les uns sur les autres.»

Annales de chemie et de physique, 2e serie, T. X.; cahier de mars, 1819. p. 288—305; ARAGO: Oeuvres complètes T. X., Paris (I. kiadás 1858), p. 132—149; FRESNEL, Oeuvres, T. I. p. 509—522.

** FRESNEL i. h. p. 413.

Ezen berendezésnél az első kristályra eső sugárnyaláb helyileg is egymástól elválasztott rendes és rendkívüli sugárra oszlott ketté; a második kristályba haladva, az első sugár — polározása síkját megtartva — mint rendkívüli, a második sugár — szintén polározása síkját megtartva — mint rendes sugár folytatta útját és ily minőségben lépett ki a szerkezetből. Minthogy a két kristály vastagsága egymással egyenlő volt: a kilépő, — egymásra merőleges síkokban polározott — két sugár optikai úthossza is igen közelítőleg egyenlő volt (azaz, a két sugár menetkülönbsége ez által majdnem teljesen compenzálva volt); e körülmény daczára interferentia nem volt észlelhető.

5. §. Az első és második törvény igazolása csillámsorozatok által létesített polározás alapján.

Arago* a kettős töréstől függetlenül, akként kivánta kimutatni az első két törvényt, hogy először az egymáshoz párhuzamos síkokban polározott sugarak interferáljanak; azután pedig e sugarak egyike polározása síkját e sugár körül — phásisa megváltoztatása nélkül forgatva — az interferentia-csíkok mindinkább gyengüljenek, míg végre, mikor a két sugár polározási síkjai egymásra merőlegesek, e csíkok teljesen eltünjenek.

E végből Fresnel-lel együtt gondosan kiválasztott, egymásra rakott, kicsiny kiterjedésű, tizenöt vékony csillámlemezből álló sorozatot középen kettémetszettek s így optikai szempontból egyenértékűnek tekinthető két oly lemezsorozatot nyertek, mely a rajtuk áthaladó fényt eléggé tökéletesen polározta, ha ez e sorozatokra kb. 60° beesési szög alatt érkezett.

A két sorozatot ily hajlással átlátszatlan ernyőben egymáshoz közel fekvő keskeny két nyilás elé, az átmenő nyalábok körül forgathatólag úgy helyezték el, (2. ábra) hogy az egyik sorozatból kilépő, síkban polározott nyaláb az egyik, a másikból kilépő szintén síkban polározott nyaláb a másik nyíláson haladt át.

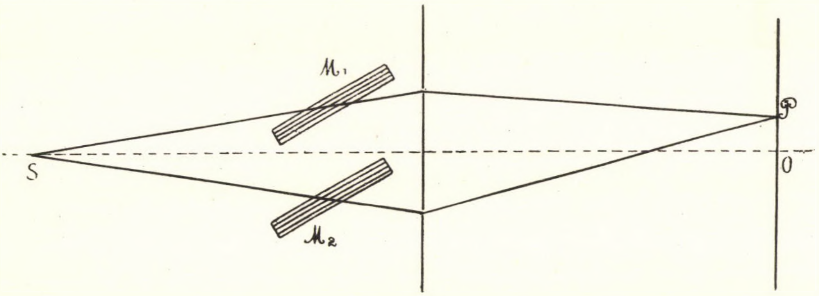
Ha most valamely kellő távolságban levő fénylő pontból szár-

---

* V. ö. pl. Fresnel, i. h. p. 414—416; 514.

mazó, a sorozatokon keresztülment két sugárnyaláb a két nyilásra esett: ezen áthaladva fényelhajlást szenvedett. Ezen elhajlott sugarak egymással interferáltak s a YOUNG-féle interferentiacsíkrendszert létesítették, mikor a két sorozat beesés síkjai egymáshoz párhuzamosak voltak, ellenben nem mutattak interferentiát, mikor a síkok egymásra merőlegesek voltak.

Ámde, FRESNEL* szavai szerint, az első helyzetben a csíkok nagyon szabálytalanok, nagyon sokszorosak és az irányok minden faja szerint hajlitottak voltak, valószínűleg a csillámsoroza-



2. ábra.

tok csekély tökéletlenségei s egyenlőtlenségei, valamint a kettős törésű csillám optikai tengelyeinek nem egyenlő irányítása folytán.

6. §. Közvetett módszer a második törvény kimutatására.

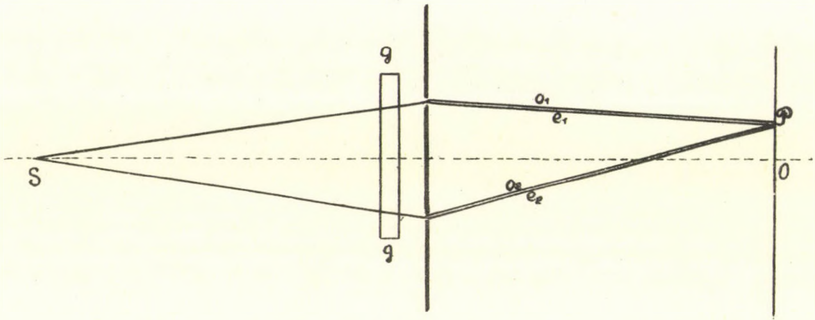
Ugyanezen napon, melyen FRESNEL és ARAGO a csillámsorozatokkal végeztek kisérleteket, FRESNEL** egy közvetett módszert gondolt ki a második törvény kimutatására. Ugyanis a YOUNG-féle kisérlet létesítésére használt két keskeny nyilás elé helyezett egy átlátszó gypszlemezt (3. ábra); az ezen áthaladó sugarak a kettős törés folytán mind két fajta, azaz egymásra merőlegesen polározott sugarakra oszlottak s a nyilásokon való áthaladás folytán diffractiót is szenvedve, interferálhatnak.

---

* i. h. p. 389, 416. ** i. h. p. 516.

Jelöljék a szokásos jelölésben az első nyilásból haladó rendes és rendkívüli sugarakat o_1 és e_1 s a második nyilásból kilépő ugyanily nevű sugarakat o_2 és e_2; ha most e két-két sugárnyaláb gondolható interferentiáját megfontoljuk, ez abban állhat, hogy általában véve o_1 és o_2; e_1 és e_2; o_1 és e_2; o_2 és e_1; és esetleg még az o_1 és e_1, az o_2 és e_2 is egymással inteferálhatna.

Minthogy az o_1 és o_2 sugarak a kristályban egymással egyenlő utakat futottak be és polározás síkjaik egymással párhuzamosak: e sugarak az SO symmetria-egyeneshez centralisan fekvő oly csíkrendszert fognak létesíteni, melynek középső maximuma



3. ábra.

O-ba esik. Ugyanily helyzetű csíkrendszert létesítenek az e_1 és e_2 sugarak is, mert ezek is egymással egyenlő utakat futottak be, polározási síkjai is egymás között párhuzamosak. E két rendszer e szerint egymást úgy fedi, hogy fénymaximum fénymaximumra, fényminimum fényminimumra esik, szóval, hogy algebrai egymásra rakásukkal egymást erősítsék.

Ellenben az egymásra merőlegesen polározott o_1 és e_2 sugarak a kristályban egymástól különböző optikai hosszaságú utakat futottak be s ha egymással interferálhatnának, oly csíkrendszert létesítenének, melynek centruma az O pont egyik oldalán volna; hasonlóképen az egymásra merőlegesen polározott o_2 és e_1 sugarak a kristálylemezben egymással nem egyenlő optikai hosszaságú utakat futottak be s ha egymással interferálhatnának, oly csíkrendszert létesítenének, melynek középpontja az

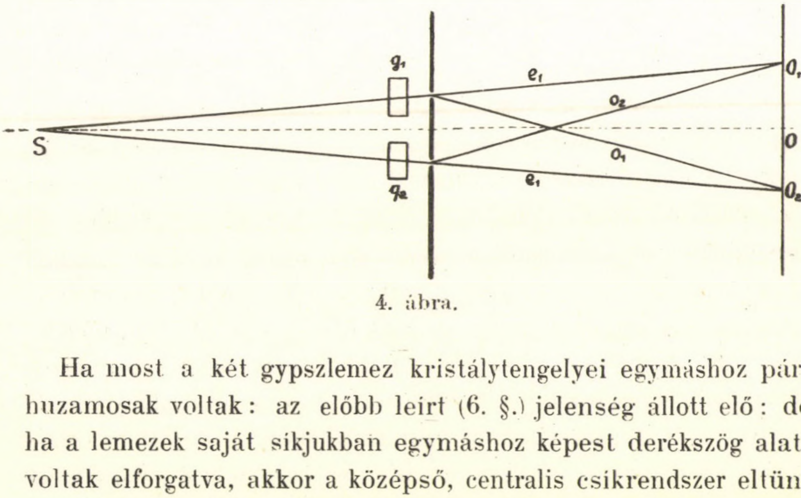
O pont másik oldalán volna. Ugyanily észrevételek állanak az o_1 és e_1, az o_2 és e_2 képzelhető interferentiájára nézve.

Ámde csak az o_1o_2 és e_1e_2 egymás fölé eső két csikrendszer volt látható; az o_1e_2 és o_2e_1 rendszerek nem mutatkoztak, még kevésbbé az o_1e_1 és az o_2e_2 rendszerek — mert az utóbbiak igy egyáltalában sohasem létesithetők.

Ebből a tapasztalatból, a jelzett felfogás alapján, azt lehetett közvetve következtetni, hogy a párhuzamos síkokban polározott sugarak egymással interferálnak, az egymásra merőlegesen polározottak ellenben nem.

7. §. Az első két törvény kimutatása szétmetszett gypszlemezekkel.

Ezen következtetés megerősítése végett nevezett szerzők úgy metszették ketté a gypszlemezt, hogy az egyik fele az egyik, a másik fele a másik hasadékot födte. (4. ábra.)



4. ábra.

Ha most a két gypszlemez kristálytengelyei egymáshoz párhuzamosak voltak: az előbb leirt (6. §.) jelenség állott elő: de ha a lemezek saját síkjukban egymáshoz képest derékszög alatt voltak elforgatva, akkor a középső, centralis csikrendszer eltünt és az O_1 és O_2 középpontú oldalrendszerek léptek fel.

E jelenség az előbb jelzett felfogás szerint úgy értelmezhető, hogy a jelen berendezésnél az áthaladó sugarak e forgatás folytán észrevehető phasisváltozást nem szenvedtek ugyan, de az o_1 és o_2 polározása síkjai egymásra s az e_1 és e_2-éi is egymásra kölcsönösen merőlegesekké válván: e sugarak egymással nem interferálhatnak s csíkrendszert nem alkothatnak; ellenben az o_1 és e_2 polározási síkjai egymással, s az o_2 és e_1-ei is most egymással párhuzamosak levén: e sugarak egymással interferálnak s az oldalt levő két csíkrendszert alkotják.

Ha a gypszlemezeknek síkjukban egymáshoz való elforgatása 45°-ot teszen ki: mind a három csíkrendszer egyszerre lép fel, mert akkor a négy nyaláb o_1, o_2; e_1, e_2; o_1, e_2; o_2, e_1 párjai tagjainak polározás-síkjai egymáshoz képest sem nem párhuzamosak, sem nem merőlegesek.

Ezen tapasztalatok megállapították az első és második törvényt.

8. §. A harmadik törvény kimutatása.

A harmadik törvényt Arago* eszméje szerint úgy mutatták ki, hogy a 2. ábra által előtüntetett eszköz két sorozatát egymásra merőleges polározási síkokkal helyezték el s a keskeny nyilásokból haladó nyalábok útjába O-ban lévő észlelő-szem elé mészpát-rhomboëdert helyeztek, melynek polározási síkja 45—45 fokot képezett a csillámsorozatok polározási síkjaival.

E rhomboëder az első nyíláson áthaladott nyalábot o_1 és e_1 sugarakra, a másodikon áthaladottat o_2 és e_2 sugarakra osztotta, mely sugarak erőssége egymással közel egyenlő volt, míg o_1 és o_2 polározási síkjai egymáshoz, az e_1 és e_2 polározási síkjai szintén egymáshoz párhuzamosak voltak, ellenben az o_1 és o_2 síkjai merőlegesek voltak az e_1 és e_2 síkjaira. Az észlelés semmiféle csíkrendszer jelenlétét nem mutathatta ki s így az első polározás előtt természetes sugár-nyalábból keletkezett, egymásra merőlegesen polározott két nyaláb az o polározási síkra vonatkozó o_1 és o_2 összetevőkre történt visszavezetés után sem interferált, épen így nem interferált az e polározási síkra vonatkozó e_1 és e_2 összetevőkre történt visszavezetés után.

Ezzel a harmadik törvényt állapították meg.

(Az analysáló mészpátot pl. Nicol-féle hasábbal helyettesíthetni, melynek főmetszete 45°-ot képez a lemezsorozatok polá-

* i. h. p. 143—144.

rozási síkjaival; ekkor a NICOL-ból csak az e_1 és e_2 sugarak lépnek ki, melyek ezen analysátor polározási síkjára vannak redukálva; interferentia nem látható.)

9. §. A negyedik törvény igazolása.

A negyedik törvényt FRESNEL* eszméje szerint úgy mutatták ki, hogy a 3. ábrában körvonalozott berendezésnél az S-ből induló fény, mielőtt a gypszlemezre esett, síkban lett polározva és pedig mészpát segélyével; a gypszlemez optikai tengelyeihez párhuzamosan volt hasítva s e tengelyek felező vonala a beeső fény polározási síkjával 45°-ot képezett.

A gypszlemezen át a keskeny hasadékokon keresztülhaladó o_1, e_1; o_2, e_2 nyalábok közül o_1 és o_2 egymáshoz, e_1 és e_2 szintén egymáshoz párhuzamosan polározvák, de az o-k síkjai a nevezett felező vonalhoz párhuzamosak, az e-k síkjai erre merőlegesek. E nyalábok egy analysáló mészpátra estek, melynek főmetszete a gypszlemezre eső fény polározási síkjával párhuzamos volt. E mészpát nyolcz nyalábra bontotta a nevezett négy nyalábot és pedig rendre:

$$o_1o,\ o_1e;\ e_1o,\ e_1e;\ o_2o,\ o_2e;\ e_2o,\ e_2e$$

sugarakra, melyek jelzése könnyen érthető; ezek közül az o végzetűek egymás között, az e végzetűek is egymás között, párhuzamosan vannak polározva; de az o csoport polározási síkjai a mészpát főmetszetéhez párhuzamosak, az e csoport síkjai erre merőlegesek.

A kísérlet mutatja, hogy az o végzetű sugarak egymás között s az e végzetű sugarak egymás között interferálnak. Közelebbről pedig, hogy az

$$o_1o \text{ és } o_2o;\ e_1o \text{ és } e_2o;\ o_1o \text{ és } e_2o;\ e_2o \text{ és } e_1o$$

sugarak létesítette csík-rendszerek tényleg fennállanak és pedig az első kettő egymást fedő s egymást erősítő centralis rendszereket alkotnak, a többi kettő egy-egy oldalt fekvő rendszert.

---

* i. h. p. 518—520.

Ugyanigy viselkednek az

$$o_1e \text{ és } o_2e;\ e_1e \text{ és } e_2e;\ o_1o \text{ és } e_2e;\ o_2e \text{ és } e_1e$$

párok, melyek közül az első kettő szintén egymást erősitő s egymást fedő centralis rendszereket alkot, mig a többi két pár szintén egy-egy oldalt fekvő rendszert létesit.

E szerint az észlelők egyszerre mind a nyolcz csíkrendszert látták és pedig helyileg egymástól elválasztott *hat* rendszer képében, minthogy az o végzetű és az e végzetű nyalábok két-két centralis rendszere egymást erősitve egybeesik.

Az oldalt eső négy rendszer tényleges fellépésével a negyedik törvényt igazolták.

Jegyzet: az o_1e és e_1e; az o_1o és e_1o; az o_2o és e_2o és az o_2e és e_2e nyalábok egymásra hatásáról a nevezett szerzők részéről említés nem történik.

10. §. Az ötödik törvény megállapítása.

Az ötödik törvényt úgy állapitották meg,* hogy a megelőző kisérletben az analysaló mészpátot, mely nagy mérvű kettős törésénél fogva az o végzetű nyalábokat aż e végzetűektől *helyileg* is elválasztotta, helyettesitették vékony gypsz- vagy quarcz-lemezzel, melyek kettős törése sokkal kisebb; ez a reá eső négy nyalábot a fent jelzett módon szintén szétosztotta a nevezett nyolcz sugárra, de az o végzetűeket helyileg nem választotta el a hozzájuk tartozó e végzetű sugaraktól. Várható volt e szerint, hogy a kettősen centralis két rendszer s oldalt eső két-két rendszer egymást erősitőleg fedjék; ámde a kisérlet csak a — most már egymást erősitő négy rendszer egymásra rakásából létesült — centralis csikrendszer jelenlétét mutatja; az oldalt eső rendszerek pedig látszólag eltüntek. Ezen utóbbi körülményt a két észlelő úgy magyarázta, hogy az o_1o és e_2o és az o_1e és e_2e párokból létesülő rendszerek, melyek az O symmetria-pont egyik oldalán feküsznek, oly elhelyezésűek, hogy az elsőnek fénymaximu-

---

* i. h. p. 521.

mai az utóbbiak minimumaira esnek s megfordítva, úgy, hogy e két rendszer egymásra rakása egyenletes megvilágítást létesit. Ugyanily viselkedést mutatnak az

$$o_2o \text{ és } e_1o \text{ és az } o_2e \text{ és } e_1e$$

párokból létesülő az O centralis pont másik oldalán fekvő csíkrendszerek.

A most felemlített négy rendszer közül az o végzetűek polározás síkja az első polározás síkjához párhuzamos lehet; ekkor az e végzetűeké erre merőleges; vagy az o végzetűeké erre merőleges lehet s akkor az e végzetűeké ehhez párhuzamos. A csíkrendszerek e szerint egymáshoz képest egy fél csíkközzel vannak eltolva, s így az ötödik törvény igazolva látszik.

11. §. A negyedik és ötödik törvény kimutatásának más formája.

Ámde, mind a negyedik, mind az ötödik törvényt a harmadik törvény kimutatására használt Arago-Fresnel-féle csillámsorozatos eszközzel (8. §.) is és pedig egyszerűbben mutathatták ki. Ugyanis, a fénylő pontból haladó sugárnyalábot, pl. mészpát segélyével síkban polározottá tették, úgy, hogy polározása síkja a két nyilás normalisain átmenő síkkal 45°-ot képezett; egyébként pedig az eszköz berendezése ugyanaz maradt, mint a harmadik törvény kimutatásánál.

Az oldalt eső csíkrendszerek mind a rendes, mind a rendkívüli nyalábok egymással való interferentiája folytán jelentkeztek s így a negyedik törvényt közvetetlenül igazolták.

Ha most végre a rendes és rendkívüli sugarakat egymástól helyileg is elválasztó második mészpát helyébe vékony quarczvagy gypszlemezt teszünk, mely e sugarakat egymástól helyileg nem választja el, akkor semmiféle interferentia-jelenség nem tapasztalható; ezzel, a fent jelzett meggondolás szerint, az ötödik törvény közvetve van kimutatva.

12. §. Észrevételek az Arago-Fresnel-féle kísérletekhez.

Arago és Fresnel ezen kisérletei, elrendezésük és kivitelük minden tökéletlenségei daczára elegendő tapasztalati anyagot nyújtottak arra nézve, hogy genialis szerzőik éles elméjű logikával a róluk nevezett törvényszerűségeket vonhatták le.

A részletezett leirásból azonban az is kiderül, hogy e kisérletek ellen a következő alapos megjegyzések merülhetnek fel:

a) A 4. §-ban (1. ábra) említett kisérletnél hiányzik és nem is létesithető az az ellenpróba, hogy az a két nyaláb, mely ott láthatólag nem létesit interferentiát, ilyet mutatna, ha — a többi viszonyokat változatlanoknak hagyván — polározási síkjaik egymáshoz párhuzamosakká tétetnének. Ezenkívül a nyalábok helyileg is bajosan választhatók el jól egymástól; továbbá mihelyt nem merőleges egymásra a két főmetszet: *négy* sugárnyaláb lép ki, mely e jelenséget tetemesen bonyolítja.

b) Az 5. §.-ban (2. ábra) leirt kisérletben Arago-nak igen helyes, egyszerű gondolata nyilatkozik meg, mert e kisérlet ellenpróbára is alkalmas; mindazonáltal egy kiviteli s egy elvi tökéletlenségben szenved: Ugyanis a csillámlemez-sorozatok tőkéletlenül polározzák a rajtuk átment fényt és nem is teljesen planparallel lemezek; másrészt a Young-féle elhajlitó-interferáltató berendezésnél nem az egyenesen átmenő, hanem az elhajlitott fény sugarai interferálnak. Az előbbi, igen jelentékeny tökéletlenséget már Fresnel is beismeré.*

c) A 6. §-ban (3. ábra) említett módszer először is nem egyenes, másodszor ismét a Young-féle berendezés (elhajlitott sugarak interferentiája) van alkalmazásban, továbbá négy sugárnyaláb jelentkezik egyszerre a látótérben s az észlelhető, egynek látszó csikrendszer oly két rendszer egymásra rakásából származott, mely egymástól el nem választható s külön meg nem vizsgálható.

d) A 7. §-ban (4. ábra) leirt kisérlet szintén négy sugárnyalábbal dolgozik, a Young-féle berendezést használja s három csikrendszert mutat, melyek közül az oldalt eső két rendszer háttere mindig világos.

e) A 8. §-ban részletezett eljárás a *b)* alatt említett tökélet-

---

* i. h. p. 516; jelen közlemény 365. lap.

lenségeket mutatja, melyekhez most még a négy sugárnyaláb és pedig nem egyszerűsítőleg lép.

f) A 9. §-ban említett kísérletre először is a *c)* alatt jelzett megjegyzések érvényesek; ezekhez járul most a *nyolcz* sugárnyaláb s az interferentiájukból származó láthatólag *hat* csíkrendszer; e szerint a jelenség tetemesen bonyolódott.

g) A 10. §-ban felsorolt berendezés az *f)* alatt részletezett észrevételeknek van alávetve azon jelentékeny bonyolítással, hogy most *négy* csíkrendszer esik erősítőleg egymásra, más kétkét rendszer pedig egymást optikailag semlegesíti.

h) Végre a 11. §-ban ismertetett eljárásra nézve az *e)* pontban említett megjegyzések érvényesek oly kiegészítéssel, hogy itt a negyedik törvény egyenesen, az ötödik közvetve mutatható ki.

i) Valamennyi megfigyelő, ki e kísérleteknek a fent jelzett berendezések mellett végzett ismétlésével foglalkozott, kivétel nélkül beismeri e jelenségek előállításának kényességét, nehézségeit és értelmezésük bonyolult voltát.

II. Az első két törvény igazolására szolgáló ujabb kisérletek. Észrevételek.

13. §. Az első két törvény kimutatása egyenértékű turmalinlapokkal. Stokes.

A jelzett kisérleti tökéletlenségek elkerülése s a törvények szabatos bemutatása s esetleg általánosítása végett az utolsó évszázadban többféle kisérlet történt; csak az első két törvény igazolására szolgálók közül a következőket soroljuk fel:

G. G. Stokes egyik nagyfontosságú értekezésében* mondja: Közönséges fényből álló, egymáshoz közel haladó, közös fény-

---

* «On the composition and resolution of streams of polarized light from different sources», Transactions of the Cambridge Philosophical Society, Vol. IX, p. 399; (1852. évi februárius 16-án és márczius 15-én); ugyanez: Stokes: Mathematical and Physical papers, Vol. III, Cambridge 1901 p. 233—258.

forrású két fénynyaláb interferentiacsík-rendszert létesitsen. Egy gondosan egyenletes vastagságúvá csiszolt turmalin ketté metszessék s felei a két nyaláb útjába helyeztessenek, úgy, hogy egy-egy nyaláb egy-egy turmalinfélen haladjon át.

A tapasztalás azt mutatja, hogy a mikor a két turmalin polározási síkjai egymáshoz párhuzamosak, a csíkrendszer tökéletesen létesül; de ha az egyik turmalinlemez saját síkjában (a rajta áthaladó sugárnyaláb körül) forgatva leszen, a csíkok mindig gyengébbek lesznek s végre, mikor a két turmalin polározási síkja egymásra merőleges, a csíkok eltünnek.[1]

Ugyanezt az eljárást emliti fel G. B. AIRY[2] és P. DRUDE.[3]

14. §. Az első két törvény igazolása egyenértékű két quarcz vagy gypszlemezzel. La Roux. Mascart.

Ide számitható LA ROUX eljárása és eszköze is,[4] mely lényegében véve optikai tengelyükhöz párhuzamosan metszett planparallel két quarczlemezből áll; közülük az egyik látótengelye körül forgatható. Valamely interferáltató készülék által nyujtott, közös eredetű két nyalábból alakuló reális két kép a két lemezre esik s a nyalábok az áthaladás után általában véve interferálnak.

Ugyanígy használható a két lemez, ha valamely előttük levő átlátszatlan ernyőbe vésett keskeny két nyiláson át fénynyalábok esnek a lemezekre s az áthaladó sugarak a fényelhajlás után egymással interferálnak; a fényforrás az ernyőtől alkalmas távolságban levő, finom hasadékon átbocsátott fénynyaláb.

Ezen lemezek egyikének jelzett forgatása által a létesült csíkrendszerek intensitása a fent jelzett módon változik, de itt is mindig az o_1, e_1; o_2, e_2 négy nyaláb a látótér minden pontjában van jelen.

E. MASCART[5] szintén alaptapasztalatnak tekinti a jelzett vo-

[1] i. h. p. 254.

[2] Undulatory theory of optics., New edition, London, 1877, p. 88, 89.

[3] i. h. p. 228.

[4] PH. PELLIN-DUBOSCQ, Instruments d'Optique et de Précision, IV-ème fascicule, Paris 1900, p. 12, 13; No 14.

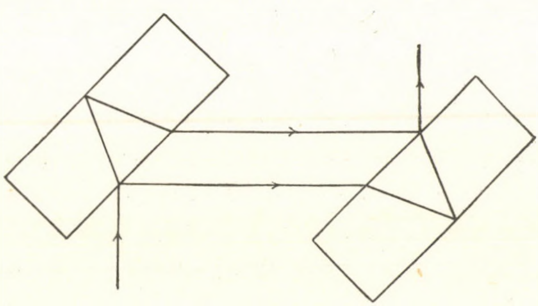
[5] Traité d'Optiqe, T. I., p. 533.

natkozásokat és azt ajánlja, hogy valamely kettémetszett gypszlemez két felére essenek a fent emlitett realis képek és pedig úgy, hogy egyszer mindkét kép egy félre, másszor a másik félre essenek, akkor a látótér közepén mutatkozó interferentiajelenség ugyanolyan, mintha a lemez jelen sem volna. De ha a képek egyike az egyik, másika a másik lemezre esik s az egyik lemez látótengelye körül forgást nyer: a csikrendszerek intensitásváltozása áll elő s a középső rendszer eltüntethető.

Itt is egyszerre mind a négy sugárnyaláb jelenik meg a látótérben.

15. §. Az első két törvény megállapítása identikus mészpátokkal, Young vagy Jamin eszközével. W. Voigt.

W. Voigt* ajánlja, hogy egymáshoz közel identikus két kettős pát a Young-féle diffractio-interferentia eszközzel vagy a



5. ábra.

Jamin-féle interferentiális refractometerrel** (5. ábra) combináltassék; e pátokból kilépő két-két sugárnyaláb egyike pl. a rendkívüli nyalábok alkalmas diaphragmák által elfödhetők, úgy,

* i. h. p. 538, 539.

** Ezen eszköz főalkatrésze két planparallel, vastag üveglap, melynek valamely sugárra való geometriai-optikai hatását az 5. ábra mutatja; itt a később interferáló két sugár útja egy részében jelentékeny (3—4 cm.) távolságban egymástól halad s így különböző optikai behatásoknak vethetők alá.

hogy csak a rendes törésű nyalábok működhetnek, melyeknek optikai úthossza a mészpátok egyenlő vastagságánál fogva majdnem egyenlő egymással.

A megfigyelés mutatja, hogy a mikor a két kristály egymáshoz párhuzamos helyzetű, akkor az interferentiajelenség ugyanaz, mintha a kristályok jelen nem volnának, de ha az egyik kristályt a rajta átmenő rendes sugárnyaláb körül forgatjuk: az interferentia-csíkok élessége fogy s ezek teljesen elenyésztek, mikor a forgás szöge, azaz a két kristály főmetszetei közti szög $\frac{\pi}{2}$. A forgást folytatva, a csíkok újra előtünnek s maximális erősséget mutatnak, mikor a forgás szöge π, ezentúl fogynak, újra eltünnek, mikor a szög $\frac{3\pi}{2}$; s végre 2π forgásszögnél kezdőállapotukat mutatják.

Nincs e helyen megmondva, vajjon tényleg történt-e ily kisérlet és ki által? vagy csak «elméleti» kisérletnek kivánja-e a szerző e kijelentését tekintetni?

16. §. Észrevételek Stokes, La Roux, Mascart és Voigt eljárásaihoz.

a) STOKES gondolata (13. §.) általában véve helyes, ha ezt lehetőleg tiszta interferentia-jelenségre alkalmaznók; de kivitele a legnagyobb mérvű tökéletlenségekkel jár, mert először is aránylag csak kicsiny nagyságban kaphatók tiszta turmalinlapok s ezek a kettémetszés által még kisebbek lesznek; másrészt ilyenek épen kicsinységüknél fogva nagyon nehezen csiszolhatók szigorúan planparallel lemezekké; főleg azonban igen nagy mértékben gyöngítik és színezik az áthaladott rendkívüli nyaláb erősségét, ha pedig vékonyak, akkor részben a rendes sugarat is átbocsátják és polározásuk nem tökéletes.*

---

* Magam is sokat fáradoztam a kisérletnek a szövegben leirt módon való létesitése körül; egy szétmetszett turmalinlap két felével, melyet KRENNER JÓZSEF SÁNDOR tagtársunk volt szives rendelkezésemre bocsátani; de csíkot csak akkor — és pedig nagy nehezen — láthattam, mikor a két turmalin egymáshoz való helyzete olyan volt, mint a szétmetszés előtt, bármily más helyzetben semmiféle csíkot nem vehettem észre s a csíkok fokozatos eltünését és előtünését nem észlelhettem; miért is ezen eljárást teljesen elhagytam.

b) LA ROUX eszköze (14. §.) *négy* sugárnyalábbal dolgozik, melyek interferentialis viselkedése a 12. §. *d)* pontjában is érintve van: négy csíkrendszert mutat, melyek közül kettőnek egymásra rakásából a centralis rendszer létesül; ha az eszköz a YOUNG-féle berendezéssel combinálódik, ezen utóbbinak a 12. §. *b)* pontjában említett tökéletlensége is hozzájárul.

c) E. MASCART gypszlemez-eljárására nézve (14. §.) teljesen érvényesek az épen LA ROUX eszközére vonatkozólag tett megjegyzések.

dα) W. VOIGT javaslatainak elseje (15. §.) elvileg nem helytelen, ha azt tiszta interferentia jelenségre alkalmaznók; de a YOUNG-féle kisérletre alkalmazva a többször említett tökéletlenséget mutatja; hozzájárul még, hogy a kettősen törő két mészpáton áthaladó két-két sugár közül a két rendkívülinek elfödése és a pátok forgása közben elfödve tartása bizonyos gondot kíván. Nem tudok az irodalomban nyomot arra nézve, hogy a kisérlet tényleg végre lett volna hajtva; ha oly egyszerű volna, bizonyára alkalmaztak volna ARAGO és FRESNEL a YOUNG-féle berendezésnél a csillámsorozatok (5. §. 2. ábra) helyett, vagy a két gypszlemez helyett (7. §. 4. ábra), ily egyenlő két mészpátot, mert az első ily kisérletnél (4. §. 1. ábra) tényleg használtak, de egymás *után* s nem egymás *mellett*, két egyenlő mészpátot.

dβ) W. VOIGT javaslatainak másodikát (15. §. 5. ábra) elvileg kell helytelenítenem. Először is az első vastag üveglapra eső, természetes fénysugár e lap által visszaverődés és törés által több részre oszlik; csak a felrajzolt két részét véve tekintetbe, e kilépő két sugár erőssége egymással általában véve nem egyenlő, sőt rendesen igen nagy mértékben különböző. Az egyik ugyanis az elülső felületről egyszerüen visszaverődött, míg a másik az elülső felületen törést, a hátsó felületen pedig teljes visszaverődést — vagy ha az ezüstözve van — fémes visszaverődést szenved s az elülső felületen történt újabb törés után lép ki. Továbbá, eltekintve a *dα)* alatt a két mészpátra nézve mondottaktól, az a két rendes fénysugár, mely az itt alkalmazásra ajánlott két mészpátból kilép, a második vastag üveglapon általában véve optikai behatásoknak van kitéve, melyek polározási állapotukat megváltoztatják; e sugarak csak azután interferálhatnak. A síkban polározott egyik sugár ugyanis a második vastag üveglap elülső felületéről szenved egyszerű visszaverődést; ez által — elegendő megközelítéssel — síkban polározott sugár marad ugyan, de a visszaverődött sugár polározási síkja általában véve nem esik egybe a lapra eső sugár polározási síkjával. A más síkban polározott másik sugár ellenben a második vastag üveglapra esve, ott az elülső felületén törést, a hátsó felületen *totalis* vagy, ha ez ezüstözve van — *fémes* visszaverődést szenved, miáltal e sugár *ellipsisben polározottá* lesz.

E szerint az így interferáló két sugár közül az egyiknek polározási síkja elforgott a másik ellipsisben polározott sugár lett, hozzájárul még a sugarak erősségének az egyszerű reflexió s a teljes vagy fémes reflexió által nem egyenlőképen előállott gyöngülése, mely az első üveglapon nyert gyöngüléseket általában véve nem compensálja. Mindezeknél fogva is ezen eljárás *elvileg* nem alkalmas *síkban* polározott fénysugarak interferentiája törvényeinek szabatos kimutatására.

Mindazonáltal két kivételes esetben nem változik meg a második vastag lapra eső síkban polározott fény polározási állapota: ugyanis, mikor a ráeső fény polározási síkja a beesés síkjába esik vagy reá merőleges, de a fényerősségek egyenlőtlen gyöngülése itt is érvényes, s a csíkoknak az egyik sugár polározási síkjának fokozatos elforgatásánál fellépő változását szabatosan követni nem lehet.

Ezen kisérletnek tényleges alkalmazására nézve az irodalomban nyomot nem találtam.

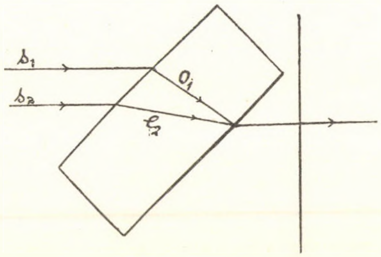
17. §. Csak a második törvény látszólagos kimutatására alkalmasnak vélt kísérlet. Észrevételek.

E helyen felemlíthetünk egy egyszerű kisérletet, melyet többen a második törvény kimutatására alkalmasnak tartanak: Párhuzamos természetes fénysugárnyaláb esik kissé vastag párhuzamos lapú kettősen törő lemezre, s ezt, kettős törést szenvedve, elhagyja; a kilépő nyalábokat átlátszatlan ernyő tartja vissza s csak kicsiny nyiláson át enged keskeny nyalábot (6. ábra.)

E kilépő nyaláb az s_1 sugár o_1 rendes és az s_2 sugár e_2 rendkívüli sugarából tevődik össze és semmiféle interferentiát nem mutat.

Ha a kettősen törő kristály elég vastag s a kettős törés elég nagy, az s_1-et elfödve, a nyiláson át csak e_2, ellenben az s_2-t elfödve, a nyiláson át csak o_1 sugár haladhat, s kisérletileg kimutatható, hogy ezek polározási síkjai egymásra merőlegesek.

Az interferentia kimaradása itt külön-külön két oknak tulajdonitható: *α)* a polározási síkok egymásra való merőlegességének; *β)* a találkozó sugarak nagy menetkülönbségének.



6. ábra.

Az első oknak fennállását csak akkor lehetne ellenvetés nélkül evidenssé tenni, ha *ugyanazon* két o_1 és e_2 sugár polározása síkjait egymáshoz párhuzamosakká tenni lehetne — minden többi sajátságaiknak változatlanúl hagyásával — s ha akkor kiderülne, hogy tényleg interferálnak; de ezen főellenpróbát itt lehetetlen alkalmazni, mert a kristály belsejében az o_1 és e_2 sugarak megközelíthetetlenek s polározási síkjaik egymáshoz képest nem forgathatók.

E szerint e kísérletből a második törvény kényszerítő szükségességgel nem következtethető.

A második lehetséges okra nézve megjegyzendő, hogy a mikor az s_1 és s_2 természetes sugarak egymástól való távolságát elegendő nagynak kívánjuk úgy, hogy s_1-et és s_2-őt külön-külön elfödhessük, pl. 1 mm-nek választjuk, akkor még az erősen törő mészpát esetében is a kristálylapnak elég vastagnak kell lenni, hogy az s_1-ből származó o_1, s az s_2-ből származó e_2 a keskeny nyiláson áthaladhasson. De ekkor a nyiláshoz érkező e két sugár menetkülönbsége aránylag igen jelentékeny, oly jelentékeny, hogy még párhuzamosan polározott sugarak esetében is e menetkülönbséget alkalmas módon compensalni kellene, hogy rendes körülmények közt interferentiát láthassunk.

Ezek szerint e kisérletnek semmiféle bizonyitó erőt nem tulajdoníthatunk.

Fröhlich Izidor.

PHYSIKAI LABORATORIUM.

A gázok fajsulyának meghatározása elektromos izzólámpa segélyével. A kiégett elektromos izzólámpa jól felhasználható a légnemű testek sulyának meghatározására. Mérjük meg pontosan az izzólámpa sulyát, azután törjük össze és ismét mérjük meg: az így nyert sulynövekedés mutatja a lámpában foglalt levegő sulyát. Ez A. Schmidt eljárása (Zeitsch. f. d. phys. u. chem. Unt. XII. 349. l.), a melynek — ha nem is nagy — az a pontatlansága, hogy a körtében levő levegőnek csak sulyát határozza meg, de térfogatát nem. A mikor ugyanis a térfogatot mérjük, vele kell mérnünk az üvegdarabok térfogatát is.

Ez eljáráshoz hasonló az A. W. Gray-é, a mely a következő (Zeitsch. f. d. phys. u. chem. Unt. XV. 161. l.). Egyensulyozzunk egy kiégett izzólámpát és vele körülbelől 0·5 cm^3 puha viaszt oly mérlegen, a melyen még 1 centigrammot mérhetni. Ha most a körte üveg-hegyét óvatosan lereszeljük s a körtét, a lehullott üvegdarabokkal együtt pontosan megmérjük, akkor megkaptuk a betódult levegő sulyát. A keletkezett nyiláson át keskeny üvegcső segélyével bármily gázt bevezethetünk a körtébe, a mely belőle a levegőt kiszorítja. Zárjuk el a nyilást a viaszszal és mérjünk, úgy e mérés az illető gáz sulyát adja meg. Ha már többé gázokkal nem akarunk kisérletezni, töltsük meg a körtét kis tölcséren át vízzel s határozzuk meg a víz sulyát egyszerű mérlegen, a melynek alapján az elektromos izzólámpa térfogata is kiszámítható.

Talán nem érdektelen, ha itt közzéteszem azokat az eredményeket, a melyeket Gray tanítványai kaptak. A 16 tanuló ugyanegy időben dolgozott, mindenik 32 gyertyás lámpával. Ezek mintegy 0·3 gramm levegőt fogadnak be, úgy hogy az 1 cg-os érzékenységű mérlegen legfeljebb 3%-os pontosságú mérésre számíthatni. A 16 meghatározásnak középértéke a levegő fajsulyát illetőleg 0·00116 volt. A szélső értékek 0·00108 és 0·00125 voltak, a hiba középértéke tehát 0·000039, vagyis 3·4%. A kisérletek ideje alatt a légnyomás 757 és 766 mm., a hőmérséklet 18·5 és 20·8° C közt váltakozott; a levegő a telítettséghez elég közel állott. Az ezen adatok után kiszámított értékek valamivel magasabbak voltak, mint a melyeket a kisérletek adtak, a minek okát Gray a kiégett lámpában valószinüleg visszamaradt gáz-nyomokban keresi-

A világítógázra nyert eredmények kevésbbé voltak jók. A középértéktől való eltérés körülbelől 6·5% volt. Igaz, hogy az izzólámpák mindössze is csak mintegy 0·2 gramm világítógázt fogadnak be, a miért is 5%-nál nagyobb pontosság nem várható. Továbbá nehéz azt is megállapítani, vajjon a világítógáz kiszorította-e az összes levegőt.

Annak a néhány kisérletnek a középértéke, a melyet különböző nagyságú lámpákkal tettem, a levegő fajsulyát illetőleg 0·001192 volt, 759 mm. légnyomás és 20° C hőmérséklet mellett.

*

A kerékpár kerekével végezhető pörgettyűs kisérletek. Egyszerű készüléket állított elő *Chas. T. Knipp,** a Cornell-egyetem physikai intézetében az által, hogy a kerékpár kerekét használta fel lendítő tömeg gyanánt. E készüléket csekély fáradsággal bárki megkészítheti, főleg ha tartózkodási helyén kerékpár- vagy lakatos-műhely van. Maga az eszköz azután gyroskopos ingának épp oly jól használható, mint kiegyensulyozott gyroskopnak vagy pörgettyűnek. Az egyszerűség mellett megvan még az az előnye is, hogy mentes ama hibától, a mely tudvalevőleg a legtöbb gyroskopnál előfordul, a melyeknél a tengelynek igazi oscilláló mozgása a lendítő-keréknek rendkívül kicsiny sebessége mellett s akkor is csak néhány másodperczig figyelhető meg. Az oscillálások ugyanis a talapzathoz való surlódás folytán megszünnek, s a precessió mozgása egyenletessé változik át.

Knipp a kerékpár első kerekét használja fel, a melyet tengelyével és golyós csapágyával együtt vesz ki villájából.

Talán nem lesz érdektelen itt arról a különben ismert kisérletről megemlékezni, a melyet a kerékpárból kivett kerékkel magával végezhetni. Mivel a tengely eléggé kinyúlik a tengelyágyból, a kereket jól meg lehet markolni. Ha most — a kiálló tengelyt kezünkben szilárdan tartva — a kereket forgatjuk: kész az ismert játék-gyroskop, a mely a precessió mozgást szépen bemutatja. Egyuttal nagyon jól megfigyelhetjük azokat a szabálytalan mozgásokat is, a melyek akkor keletkeznek, ha a kerék mozgását zavarjuk. Ez utóbbit legczélszerűbben úgy érjük el, ha a tengely végét mindkét kézzel fogjuk meg, és megkiséreljük a tengelyt a kerék forgasa közben gyorsan meghajlítani.

---

* Legyen szabad megjegyeznem, hogy *Knipp* 1900 deczemberben végezte be a viz felületi feszültségének meghatározására vonatkozólag kisérleteit magas hőmérséklet mellett egész 357·5°-ig. Ily kisérleteket végzett egészen 210°-ig társulatunk elnöke *Eötvös* báró 1886-ban. *Knipp* hivatkozik is *Eötvösre*.

Vegyünk elő most egy $^3/_8$-ad hüvelyk (10 mm.) bő és 9 hüvelyk (23 cm.) hosszú gázcsövet, s vágjunk annak egyik végére csavarmeneteket, a melylyel aztán e csövet a kerék tengelyére erősítjük. A gázcső másik végét pedig, a melyre egy közönséges kapcsoló-csavar számára szintén csavarmenetet vágtunk, késreszelővel hasítsuk be. A kapcsoló-csavar szorító gyanánt szerepel s arra való, hogy a tengelyt vas- vagy rézrúddal meghosszabbíthassuk.

Ha a kereket kiegyensúlyozott gyroskop gyanánt akarjuk használni, a tengelyt — a közvetlenül a kerék tengelyére erősített gázcsőbe helyezett rúddal — 3—4 láb (91—121 cm) hosszúvá teszszük. A rúd másik végére tolható súlyt alkalmazunk, hogy a kereket kiegyensúlyozzuk. Ezzel kész a gyroskop, a melyet erős kötéllel megfelelő horogra vagy falikarra akasztunk. Az egész szerkezetet szilárdabbá tehetjük, ha a kötelet a padlóig meghosszabbítjuk, s ott egy becsavart kampóhoz megerősítjük. Föltéve, hogy a gyroskopot az ellensúly által pontosan kiegyenlítettük, úgy a kerék forgása mellett a tengely semmiféle körülmények között sem fogja helyzetét megváltoztatni. De mihelyt a súlyt a tengely hosszában eltoljuk, a rendszer súlypontja helyzetét megváltoztatja, s a gyroskop gyroskopos ingává alakul át.

A precessiós mozgás kimutatására a súlyt befelé toljuk, a kereket forgásba hozzuk s az eszközt magára hagyjuk: azonnal megkezdődik a precessiós mozgás szemmellátható oscillálásaival. Megjegyzendő, hogy a kereket úgy hozzuk forgásba, hogy a kerékágy közelében a küllőkbe kis rudat vagy sodronyt dugunk, s a forgást ezzel mint egy rövid hajtókarral végezzük. Ha a lendítő-kerék forgásiránya, a támasztási ponttól a tengely hosszában nézve negativ, úgy a gyroskop tengelyének útja felülről nézve positiv irányú cyclois. Az oscillálás mértéke és gyakorisága a kerék gyorsaságától függ: mennél gyorsabban forog a kerék, annál kisebbek és gyakoriabbak lesznek az oscillálások. A tengely oscillálását hat vagy hét teljes körülforgásig lehet észlelni. Toljuk a súlyt a támasztóponttól kifelé, akkor, miként a geometriai megfontolások is követelik, a precessiós mozgás a fennebbivel ellenkező irányú lesz, s a cyclois csúcsai lefelé fognak nézni.

Lehet a készüléket átalakítani úgy is, hogy még hosszabb gyroskopos ingává váljék. Ez esetben az ellensúlyt el kell távolítani és az eszközt függőleges tengely-állás mellett a mennyezetre kell felakasztani. Most a szabad tengelynek ama tulajdonságát, hogy t. i. minden irányváltozásnak ellenszegül, nagyon világosan észrevehetjük, főleg ha a rúd kissé hajlékony.

Távolítsuk el most a tengely meghosszabbítására szolgáló rudat, s tegyünk helyébe fából való csúcsot, akkor az eszköz pörgettyű gyanánt használható. Ha a tengelyágyak szabadok, a tengely nem fog forogni. Érdekes, hogy jelen esetben az oscillálások csakis a precessiós mozgásnak egyszeri körülforgása alatt figyelhetők meg.

A kerékpár gyroskopnak főelőnye az egyszerűsége. Továbbá, hogy a kerék átmérőjének nagysága és az ennek folytán előálló csekély szögsebesség miatt a precessiós mozgás, épp úgy mint az oscillálások, lassúk, s így mindkét tüneményt, főleg az utóbbit könnyebben követhetni. Hozzá még a kerék surlódása — a golyós csapágyban a mozgó nagy tömegre való tekintetből — rendkívül csekély.

Irodalom. Physikalische Zeitschrift. II. 612. 1901. — The Physical Review. 12. 1901.

Szekeres Kálmán.

A MATHEMATIKAI ÉS PHYSIKAI TÁRSULAT TAGJEGYZÉKE.

1902. év végén.

I. Pártoló, örökítő és rendes tagok:

Ábrahám Istv., tanár, Budapest, IX. ker. ev. ref. főgymn., Lónyai-u.

Aliquander Lajos, tanárjelölt, Budapest.

Anderkó Aurél dr., met. int. ass., Budapest, I., (Vár), Úri-u. 42.

Andor Tivadar, tanár, Budapest, I., főgymnasium.

5 Angheben Albin, főgymnasiumi tanár, Fiume.

Antolik Károly, főreálisk. ig., Pozsony.

Antony Rezső, műegy. assist., Budapest, VIII., Koszorú-u. 4-6.

Arany Dániel, tanár, Budapest, VII., Damjanich-u. 35.

Aranyosi Miksa, polg. és keresk. isk. ig., Budapest, V., Nagykorona-u. 13.

10 Arató Frigyes, állami felsőbb leányiskolai igazgató, Mező-Túr.

Asbóth Emil, min. tanácsos, Ganzgyári igazgató, Budapest, II., Ganzgyár.

Azary Miklós, tanár, Munkács.

Babiak Nándor, főreáliskolai tanár, Arad.

Baló Gyula, főgymn. tanár, Kaposvár.

15 Balog Mór, főreáliskolai tanár, Budapest, VI., Bulyovszky-u. 22.

Bánki Donát, műegy. tanár, Budapest, Műegyetem.

Barabás Jenő, főreálisk. tanár, Székely-Udvarhely.

Bárányi Balázs, főgymn. tanár, Jászberény.

Bartha Zsigmond, ev. ref. főgymn. tanár, Nagy-Enyed.

20 Bartoniek Géza, Eötvös-Coll. igazgató, vál. tag., Budapest, IX., Csillag-u. 8.

Bauer Mihály, műegy. adjunk. Budapest, VI., Izabella-u. 78.

Bein Károly, tanár, Budapest, VIII., Baross-u. 47.

Beck Károly főgymn. tanár, Budapest, VII., Kertész-u. 50.

Bellágh Kálmán, tanár, Budapest, IV., Kálvin-tér 3. II. 8.

25 Beke Manó dr., egyet. tanár, vál. tag, Budapest, II., Bimbó-u. 26.

Benda Jenő, tanár, Budapest, VIII., Sándor-u. 23/b. II. 9.

Benko Imre, főgymn. tanár, Nagy-Kőrös.

Berkes Imre, főreálisk. tanár, Budapest, VIII., Zerge-u. 7.

Bielek Miksa, műegyet. tanár, Budapest, V., Hold-u. 29.

30 Bihary Ferencz, tanár, Miskolcz.

Bláthy Ottó Titusz, főmérnök, Budapest, II., Retek-u. 77.

Blau Ármin, főreálisk. tanár, Szeged.

Bóbita Endre, főreálisk. tanár, Kassa.

Bodola Lajos, műegyet. tanár, Budapest, VII., Damjanich-u. 52.

35 Bodola László, főgymn. tanár, Csurgó.

Bodor Domokos, főgymnasiumi tanár, Sepsi-Szent-György.

Bogyó Samu, keresked. akad. tanár, Budapest, VI., Munkácsi-u. 22.

Bónis Károly, főgymnasiumi tanár, Kún-Szt-Miklós.

Borossay Dávid, szent Benedekrendi tanár, Esztergom.

40 Bozmánszky Gyárfás, sz. Benedekrendi tanár, Pannonhalma.

Bozóky Endre dr., főgymnasiumi tanár, Budapest, II., Albrecht-út 45/a.

Bozzay Zotlán, főreálisk. tanár, Budapest, V., Markó-u. 20.

Brég Gyula, bölcsészethallgató, Szent-Iván, Liptó m.

Bretz Berta, tanárnő, Szarvas.

45 Bricht Lipót, keresk. akad. tanár és titkár, Budapest, V., Alkotmány-utcza 11.

Bruck Ferencz, tanár, Budapest, VIII., Rökk Szilárd-u 35.

Bruckner Károly, ev. főgymn. igazgató, Késmárk.

Buchböck Gusztáv dr., egyet. adjunkt., Budapest, VIII., Muzeum-körút 4. I. Chemiai intézet.

Bugarszky István, egyet. m. tanár, Budapest, VII., Rottenbiller-utcza, állatorv. főiskola.

50 Bujk Béla, gymn. tanár, Karczag.

Bulyovszky Sándor, főgymn. tanár, Munkács.

Bukovszky János, gymn. igazg., Békés-Csaba.

Burkovits Lajos, főgymnasiumi tanár, Keszthely.

Butorka Száva, főreáliskolai tanár, Versecz.

55 Cholnoky Jenő, egyetemi tanársegéd, Budapest, VII., Elemér-u. 41. III.

Csajkás Mihály, főgymn. tanár, Szabadka.

Csehély Adolf, főreálisk. tanár, Székely-Udvarhely.

Csemez József, tanár, Budapest, VI., Dembinsky-u. 50. II. 17.

Csillag Vilmos, műegy. assist., Budapest, V., Solyom-u. 16. 2.

60 Csopey László, főgymn. tanár, Budapest, II., Halász-u. 1. III, 12.

Csorba György, főgymn. tan., Miskolcz.

Czakó Adolf, műegyet. tanár, Budapest, VIII., Műegyetem.

Czekeliusz Aurél, min. tan., Budapest, Ferencz József-rakpart 9.

Czencz József, tanár, Kisszeben, Sárosmegye.

65 Czigler Győző, műegyet. tanár, Budapest, IX. Üllői-út 11.

K. Danch Ferencz, tanár, Temesvár.

Darvai Mór, igazgató, Budapest, Vallás- és közokt. minist., V., Hold-u.

Dávid Lajos, egyet. hallg. Kolozsvár.

Demeter István, főgymn. tan., H.-M.-Vásárhely.

70 Demeczky Mihály dr., főgymn. igazg., Ferencz József-int. korm., Budapest II., Ilona-u. 8.

Dietz E. Lajos, tanár, Budapest, VI., Lovag-u. 18.

Dirner Gusztáv dr., egyetemi tanár, a budapesti m. kir. bábaképző igazgatója, Budapest, IV., Kigyó-tér 1.

Dobay Sándor, ev. ref. főgymn. igazgató, Mármaros-Sziget.

Dohnányi Frigyes, főgymn. tanár, Pozsony.

75 Dombay Narczisz, sz. Benedek-rendi tanár, Esztergom.

Dózsa Jakab főreálisk. tanár, Székely-Udvarhely.

Dózsa János, ipari szakiskolai igazgató, Brassó.

Eberhardt Béla, kegyesrendi tanár, Veszprém.

Eberling József, főreáliskolai tanár, Budapest, IV., Zöldfa-u. 15.

80 Edelmann Sebő dr., prem. r. kanonok igazg., Szombathely.

Egan Luiza, áll. leányiskolai tanitónő, Budapest, II., Bors-u. 17.

Ellend József, tanár, Sárospatak.

Eltscher Simon, ág. ev. főgymn. tanár, Nyiregyháza.

Emszt Kálmán dr., földt. int. vegyész, Budapest, VII., Stefánia-út 14.

85 Eötvös Loránd br. dr., egyet. tanár, a m. t. akadémia elnöke, elnök, Budapest, VIII., Eszterházy-u. 3/b.

Erdődy Imre, polg. isk. igazg., Budapest, VIII., Csokonay-u.

Fabinyi Rezső, egyet. tan., Kolozsvár.

Fabuss Alajos, főgymn. tanár, Beszterczebánya.

Faragó Andor, főgymn. tanár, Sopron.

90 Farbaky István, fő-bányatanácsos, Budapest, IX., Lónyay-u. 18.

Farkas Gyula dr., egyet. tanár, Kolozsvár.

Fehér Ipoly, főapát, p. t.,* Pannonhalma.

Feichtinger Győző, főreálisk. tanár, pénztárn., Bpest, VII., Aréna-út 66. III. 19.

Fejér Lipót dr., Budapest, VII., Csengery-u. 26. I.

95 Fekete Jenő, tanárjelölt, Budapest, IX. Csillag-u. 8.

Feldmann Gyula, mechanikus, Budapest, VI., Felső-erdősor.

Félegyházy Antal, ref. coll. tanár, Székely-Udvarhely.

Fényes Dezső, tanár, ö. t.,** Arad.

Ferenczy István, főgymn. igazgató, Nagy-Szeben.

100 Ferenczy József, kegyesrendi gymn. tanár, Nyitra.

Fertig Vilmos, műegyet. adjunkt., Budapest, VII., Almási-tér 15.

Fettl Lipót, tanár, Budapest, II., főgymnasium.

Fodor László dr., akad. tanár, Selmeczbánya.

Fogarassi Béla, főgymn. tanár, Nagy-Enyed.

105 Fölser István, műegyet. tan., Budapest, VIII., Műegyetem.

Frank Dezső, tanár, Hajduböszörmény.

Frank István, kegyesrendi főgymn. tanár, Szeged.

* p. t. = pártoló tag. ** ö. t. = örökítő tag.

Fraunhoffer Lajos, met. int. adj., Budapest, II., Fő-u. 6.
Friedmann Bernát, tanárjelölt, Budapest, VII., Dob-u. 3.
110 Frosch Károly dr., főgymn. tanár, Nagy-Szeben.
Fröhlich Izidor dr., egyet. tanár, ö. t., vál. tag, Bpest, VI., Eötvös-u. 26.
Fröhlich Károly, tanár, Budapest, VI., Eötvös-utcza 30.
Ifj. Füzy Rezső Vilmos, gépészmérnök, Budapest, VI., Eötvös-u. 43.
Gerecz Lajos, főreálisk. tanár, Kassa.
115 Gerevich Emil dr., főreálisk. igazg., Kassa.
Gidófalvy Géza, főgymn. tanár, Nagy-Szeben.
Gidró Bonifácz, szt. Benedek-rendi tanár, Komárom.
Glücklich Vilma, Budapest, VII., Kemnitzer-u. 19. II. 12.
Goldziher Károly, b. hallg., Budapest, VII., Holló-u. 4.
120 Göllner Károly, főreálisk. tanár, Pozsony.
herényi Gotthard Jenő, a m. tud. akad. l. tagja, Herény, Vasm.
Groo Vilmos,gymn.tanár,Békés-Csaba.
Grosz Ferencz, tanár, Körmöczbánya.
Groszbauer József, főreálisk. igazg., Eger.
125 Gruber Nándor, főreálisk. tanár. vál. tag, Budapest, VIII., Üllői-út 68.
Grünwald Miksa, főgymn. tanár, Losoncz.
Habán Mihály, tanár. Czegléd.
Hahóthy Sándor, felső-leányiskolai igazg., Budapest, IV., Váczi-u.
Hajnal Márton, felső-keresk. isk. tanár, Budapest, II., fels. keresk. isk.
130 Halász Ernő, gépészmérnök, Budapest, I., Várfok-u. 14.
Halmi János, főgymn. tanár, Hódmező-Vásárhely.
Harkányi Béla br. dr., observator, Ó-Gyalla, Komáromm. (Budapest, IV., Váczi-u. 12. II.)
Harsányi Dezső, mértékhit. bizotts. felügyelő, Budapest, VIII. József-körút 10.
Hassák Vidor, gymn. igazg., Kézdi-Vásárhely.
135 Hausbrunner Vilmos, tanár, Budapest, VIII., Rökk Szilárd-utcza 28.
Hauser Ignácz, tanár, N.-Kikinda.
Hauszmann Alajos, műegyet. tanár, Budapest, VIII., Műegyetem.

Hatvani Ede, kegy. r. tanár, Budapest, IV., Városház-tér.
Heinrich Teofil, m. kir. posta- és távíró-mérnök, Budapest, VII., Arena-út 62. III. 14.
140 Héjas Endre met. int. adj., Budapest, II., Fő-u. 6.
Heller Richárd, polg. isk. igazg., Baja.
Heuer Ede, tanár, Budapest, VIII., József-körut 15.
Hilbert Stefánia, Budapest, VI., Király-utcza 112.
Hirschmann Nándor, ev. lyc. tanár, Pozsony.
145 Hlatky Miklós, főreálisk. tanár, Székely-Udvarhely.
Homor István, főreálisk. igazgató, Szeged.
Hoór Mór dr., műegyet. m. tanár, gépész-mérn., Budapest, II., Fő-u. 8.
Hopp Ferencz, a Ferencz József-rend lov., p. t., Budapest, IV., Kis-hid-u. 4.
Hornig Károly br. dr., val. b. titkos tan., megyés püspök, p. t., Veszprém.
150 Horti Henrik dr., főgymn. tanár, Budapest, VIII., Üllői-út 12.
Hortobágyi Zsigmond, főgymn. tanár, Pancsova.
Horváth József dr., akadem. tanár, Pápa.
Horváth Kálmán, tanár, Gyönk, Tolna megye.
Hőgyes Endre dr., egyet. tanár, Budapest, IV., Vámház-körut 9.
155 Hubatsek Alajos, keresk. isk. tanár, VI., Epreskert-u. 10.
Ilosvay Lajos dr. udv. tan., műegyet. tanár, Budapest, VIII., Eszterházy-utcza 7.
Iszlay József dr.,egyet. tanár, Budapest, V., Gizella-tér 2.
Janell József, főreálisk. tanár, Versecz.
Javorik János, főgymn. tanár, Pancsova.
160 Jeney Pál, tanár, Kecskemét.
Jónás Ödön, műegyet. tanár, Budapest, IX., Lónyay-u. 12.
Juckel Gyula dr., felső-keresk. isk. tanár, Budapest, VIII., Zerge-u. 27.
Jurányi Henrik, Budapest, IV. Kis-hid-u. 4.
Kacsoh Pongrácz, főgymn. tanár, Budapest, VII., Murányi-u. 57.
165 Kados Aladár, keresk. isk. tanár, Budapest, VII., István-ut 24. III. 24.

*

Kalecsinszky Sándor, m. kir. földt.-int. vegyész, Budapest, VIII., Rökk Szilárd-u, 39.
Kanitz Aristid, ö. t. †
Kappel György, főreálisk. tanár, Nagyvárad.
Karai Sándor, főreálisk. tanár, Debreczen.
170 **Karczag István,** bérlő, a. t. Keszthely.
Karlovitz László, tanár, Budapest, VIII., Tavaszmező-u. 15.
Kármán Ferencz, tanár, Budapest, II., Bimbó-u. 10.
Károly J. Irén, pr. r. k. jogakadémiai magántanár, Nagyvárad.
Károlyi Lajos, főfelügyelő, Budapest, X., Szabóky-u. 14.
175 **Kegyes Tanitórend,** p. t., Bpest. IV., Városház-tér.
Kemény Ferencz dr., főreálisk tanár, Budapest, II., Lánczhid-tér 2.
Képessy Imre, tanár, Budapest, VII., Kazinczy-u. 21.
Kerekes Dezső, főgymnasiumi tanár, Rimaszombat.
Keresztély Lajos, keresk. akad. tanár, Kolozsvár.
180 Ketterer Károly érs. tanitóképezdei tanár, Kalocsa.
Kherndl Antal, műegyetemi tanár, Budapest, VIII., Műegyetem.
Király Henrik tanár, Sepsi-Szt.-György, Mikó-u. 23.
Király László, főgymnasiumi tanár, Szentes.
Kirchknopf András, gépészisk. tanár, Kassa.
185 Kiss Dénes, polg. isk. igazg., Alsó-Lendva.
Kiss 'E. János, főreáliskolai tanár, Budapest, IV., Reáltanoda-u. 7.
Kiss Gábor, főgymnasiumi tanár, Nagy-Bánya.
K. Kiss József, főgymnasiumi tanár, Debreczen.
Fr. Kiss Károly, főgymnasiumi tanár, Budapest, IX., Lónyay-u. 4/c.
190 Kiss Károly dr., üv.-techn. int. igazg., Budapest, VIII., Eszterházy-u. 1.
Kiss Tamás, főgymn. tanár, Mármaros-Sziget.
Kisgyörgy János, tanár, Nagy-Enyed.
Klatt Román tanár Pozsony, Szilágyi Dezső-u. 29.
Klatt Virgil, főreálisk. tanár, Pozsony.
195 Klein Pál, főgymn. tanár, Késmárk.

Kleiszner Rezső, főreáliskolai tanár, Budapest, VIII., Zerge-u.
Klimkó Mihály, felsőbb leányiskolai igazg., Lőcse.
Klúg Lipót dr., egy. tanár, Kolozsvár.
Klug Nándor, műegyet. tanár, Budapest, VIII., Eszterházy-u. 5.
200 Klupathy Jenő dr., egyet. m.-tanár, vál. tag, Budapest, VIII., Luther-u. 3.
Kmety János József, evang. gymn. tanár, Beszterczebánya.
Konkoly Thege Miklós ifj., calculat., Ó-Gyalla, Komárommegye.
Konkoly Thege Miklós dr., min. tan., met. int. ig., Budapest, II., Fő-u. 6.
Kont Gyula dr., fels. keresk. isk. tanár, Budapest, I., Krisztina-körut 37.
205 Kopp Lajos dr., főreálisk. tanár, jegyző, Budapest, VIII., Üllői-út 46. III. 25.
Korbuly Emil, tanár, Nagy-Szeben, Állami főgymnasium.
Korda Dezső, Paris, 64 Rue Caumartin.
Koschovitz Gyula, honvédszázados, Budapest, VIII., Ludovika.
Kosztolányi Árpád, főgymn. igazg., Szabadka.
210 Kovács Béla tanár, Kolozsvár, áll. tanitónőképző.
Kovács Ferencz, főgymnasiumi tanár, Nagy-Kőrös.
Kovács István, főgymnasiumi tanár, Lőcse.
Kovács János dr., tanár, Budapest, I., (Németvölgy), Hantos-út.
König Gyula dr., min. tan., műegyet. tanár, alelnök, Budapest, IX., Vámház-körut.
215 Kőszeghy Winkler Antal, kir. tan., ny. pénzügyi tan., okl. mérnök, Budapest, I., (Vár), Uri-u. 42.
Kötse István, tanár, Sárospatak.
Kövesligethy Radó dr., egyet. tanár, ügyv. titkár, Budapest, VII., Csömöri-út 72.
Krenko Géza tanárjelölt, Budapest, VIII. Conti-u. 42. II. 13.
Kronich Lénárd, met. int. assistens, Budapest, II., Fő-u. 6.
220 Kukla István, főreálisk. tanár, Székesfehérvár.
Kuncz Adolf dr., prem. r. kanonok prépost, p. tag, Csorna.
Kunfalvi H. Rezső, főgymn. tanár, Zala-Egerszeg.
Kurländer Ignácz, kir. aligazgató, Budapest, V., Akadémia-u. 13.

Kúthy József dr., főigazg., Székesfehérvár.
225 **Kürschák József dr.**, műegy. rk. tanár, ö. t., jegyző, Budapest, II., Albrecht-út 14.
Lakits, Ferencz dr., tanár, Budapest, VIII., József-u. 58. II.
Lakner József, gymn. tanár, Petrozsény.
Layer Antal dr., főgymnasiumi tanár, Losoncz.
Lendvay Hugó, szent Benedekrendi főgymn. tanár, Győr.
230 Lengyel Béla dr., egyet. tanár, min. tan., Bpest, VIII., Muzeum-körut 4.
Lengyel Endre tanár, Hajdúnánás.
Lengyel Imre, főgymn. tanár, Félegyháza.
Lengyel István, term. tudom. társ. igazgató, Budapest, VIII., Szentkirályi-u. 16.
bozóki Lengyel Sándor, felső keresk. isk. igazgató, Budapest, VI., Nagymező-u. 1.
235 Lévay Ede dr., főgymn. tanár, Budapest, VIII., Baross-u. 84. I. 5.
Lipthay Sándor, udv. tan., műegy. tanár, Budapest, VIII., Ujvásártér 9/a.
Lóczy Lajos egyet. tanár, Budapest, IV., Szerb-u. 10.
Lóky Béla, kegyesr. tanár, Kolozsvár.
Lukácsi György, főgymn. tanár, Nagy-Bánya.
240 Lutter János, főgymn. igazgató, Budapest, I., Krisztina-körut 63.
Magdics Gáspár, cziszt r. tanár, Pécs.
Magyar László, polg. isk. tanár, Budapest, V., Báthory-u.18.
Makay István, főgymnasiumi tanár, Pápa.
Malatin Gotthárd, szent Benedekrendi tanár, Pannonhalma.
245 **Mandák Dezső** a. t.
Marcsiss János, főgymn. tanár, Beszterczebánya.
Markoss Imre, ev. ref. főgymn. tanár, Szatmár.
Martin Lajos, p. t. †
Martinecz Ferencz, bölcs. hallg. Budapest, IV., Molnár-u. 19. II. 19.
250 Mátray Rudolf, cziszt. r. főgymn. tanár, Eger.
Mattyasovszky Kászon, Sz. B. r. tanár, Kőszeg.
Medvigy János, főgymn. tanár, Ungvár.
Mialovich Mór, főgymn. tanár, Budapest, II., Albrecht-út 8. III. 7.

Mihálovich Alajos, főgymn. tanár, Félegyháza.
255 Mikola Sándor, főgymn. tanár, Budapest, IV., Sütő-u.
Miller Gyula, felső-leányisk. tanár, Mármaros-Sziget.
Módly Krizsó, pr. r. k. tan., Szombathely.
Molnár Aladár, igazgató, Fiume.
Molnár Evelin dr., Makó.
260 Molnár Sándor, gymn. tanár, Miskolcz.
Morotz Kálmán, műegyet. adjunktus, Budapest, VIII., Szentkirályi-u. 22.
Muraközy Károly, műegyetemi tanár, Budapest, X., Szabóky-u. 22.
Müller József, főreálisk. tanár, cz. igazg., Budapest, V., Markó-u.
Nagy Dezső, műegyet. tanár, Budapest, VIII., Műegyetem.
265 Nagy Vazul Pál, tanár, Baja.
Németh Zsigmondné szül. Földes Izabella, Gurahoncz, Aradmegye.
Nesnera Aladár, iparisk. igazg., Arad.
Neumann Jenő, főgymn. tanár, Szarvas.
Neustadt Lipót, gépész-mérnök, Budapest, V., Hold-u. 25.
270 Novothny Endre, kegyesr. tanár, Kolozsvár.
Nuricsán József, culturchemikus, Budapest, V., Földm. ministerium.
Oberle Károly, főreálisk. tanár, Budapest, VI. Bulyovszky-u. 22.
Ondrus Pál, főgymn. tanár. Losoncz.
Orbán Antal, főreálisk. tanár. Budapest, VIII., Zerge-u.
275 Oszlaczky Szilárd, postatiszt, Budapest, VII., Garai-u. 3.
Osztrogonácz János, főgymn. tanár, Szabadka.
Palatin Gergely, szt. Benedek-rendi tanár, Pannonhalma.
Pallagi Gyula, gymn. igazg., Kisujszállás.
Pallos Béla Kajetán, szt. Benedekr. tan., közp. számvevő, Pannonhalma.
280 Pantea Jenő tanár, Balázsfalva.
Pap János, kegyesr. kormánysegéd, Budapest, IV., Városház-tér 4.
Pap Lajos, igazg., Sepsi-Szt-György.
Payer Jenő, m. k. posta- és távirdatiszt, Budapest, VIII., Kerepesi-út 71.
Péch Aladár, tanár, Budapest, VII., Rottenbiller-u. 27.
285 Pecz Samu, műegyet. tanár, Budapest, VIII., József-körut 17.
Pék János, keresk. isk. tanár, Székesfehérvár.

Pekár Dezső dr., Budapest, VIII., Eszterházy-u. 3/b.
Perényi Candid, cziszt.-r. tanár, Eger.
Perényi Vilmos, gymn. tanár, Eperjes.
290 Perjessy László felső-keresk. iskolai igazg., Szeged.
Péter János, végzett tanárjelölt, Kolozsvár, Kőkert-u. 68.
Pető Menyhért, szt. Benedek-rendi gymn. igazg., Pápa.
Petrogalli Géza, tanárjelölt, Kolozsvár.
Petry Gyula, főreálisk. tanár, Nagy-Várad, Nagyfürdő-u. 671.
295 Pfeifer Péter, egyet. magántanár, Kolozsvár.
Pilcz Ottó ny. posta- és távirda-főfelügyelő, Budapest, VII., Aréna-út 9.
Pizetti Rokus, főgymn. tanár, Fiume.
Plischka Norbert, főgymnasiumi tanár, Gyöngyös.
Privorszky Alajos, tanár, Temesvár, Gyárváros, Andrássy-út 1.
300 Prokess Ignácz, főgymn. tanár, Szabadka.
Rados Gusztáv, műegyet. tan., titkár, Budapest, X., Szapáry-u. 13.
Rados Ignácz, főreálisk. tanár, Budapest, VI., Szabó József-u. 21.
Raffmann Jákó dr., első m. ált. bizt. társ. mathemat., Budapest, I., Vigadó-tér.
Ráth Arnold Lajos, főgymn. tanár, Budapest, IV., Sütő-u.
305 Ratkovszky Pál, főgymn. igazgató, Szatmár.
Rátz László, főgymn. tanár, Budapest, VI., Hunyady-tér 11.
Rejtő Sándor műegyet. tanár, Budapest, VIII., Műegyetem.
Renner János, ág. ev. főgymn. tanár, Sopron.
Réthy Mór, műegyet. tanár, ö. t., vál. tag, Budapest, VIII., Műegyetem.
310 Riegl Sándor, főgymn. tanár, Kalocsa.
Riegler Sándor, keresk. akad. igazgató, Fiume.
Riesz Frigyes, tanárjelölt, Budapest, IX., Lónyai-u. 9. fsz. 1.
Rombauer Emil, főreálisk. igazg., ö. t., cz. főigazg., Brassó.
Róna Zsigmond, met. int. aligazg., Budapest, II., Fő-u. 6.
315 Roth Ágoston, egyet. hallg., Kolozsvár, Király-utcza 30.
Rothenberg Simon, tanárjelölt, Kolozsvár, Egyetem.
Rózsa István, kegyesr. tanár, N.-Károly.
Rucsinszky Lajos, tanár, Budapest, I., Mozdony-u. 19/b.
Sárkány Lajos dr., ev. ref. főgymn. igazg., Kolozsvár.
320 Schenek István, akad. tag, főbányatanácsos, Budapest, V., Akadémia.
Schimanek Emil, műegyetemi tanár, Budapest, IV., Kigyó-u. 1.
Schlesinger Lajos dr., egyet. tanár, Kolozsvár.
Schmidt Sándor, műegyetemi tanár, Budapest, VIII., Eszterházy-u. 3/a.
Scholtz Ágost dr. egyet. tanár, Budapest, VI., Rózsa-u. 46.
325 Schöndorfer Gyula, kat. s. mérnök, Nyitra 10.
Schuller Alajos, műegyetemi tanár, Budapest, VIII., Műegyetem.
Schwarcz Ottó dr., fő-bányatanácsos, akad. igazgató, Selmeczbánya.
Schwicker Alfréd dr., főreálisk. tanár, Pozsony, Stefánia-út 9.
Simon Ferencz gymn. igazg., Szászváros.
330 Simon Tadé, gymn. tanár, Kőszeg.
Sinkó József, főgymnasiumi tanár, N.-Szombat.
Sinkovits Ferencz, kegyesr. tanár, Léva.
Skopal István, főgymn. tanár, Budapest, VII., Barcsay-u. 5.
Somogyi István, kegyes rendi tanár, S.-A.-Ujhely.
335 Söpkéz Sándor, főfelügyelő, Budapest, V., Sas-u. 14.
Stáhl Géza, főmérnök, Debreczen.
Stanics Fulgent, sz. Benedekrendi gymn. tanár, Pápa.
Stauber József, főreálisk. igazgató, Nagyvárad.
Steécz György, apátkanonok pléb., Apatin.
340 Steiner Lajos dr., met. int. assist., Budapest, II., Fő-u. 6.
Steiner Miklós, pr. r. tanár, Szombathely.
Steiner Simon dr., tanár, Temesvár.
Stefancsik Milán, assist., Praga.
Straub Gyula, tanár, Temesvár Gyárváros.
345 Straub Sándor, tanár a techn. iparmuzeumban, Budapest, VIII., József-körut 6.
Strausz Ármin, műegyet. adjunktus, Budapest, VIII., Műegyetem.
Streitmann András, tanár, Jászberény.
Strohbach Géza, tanár, Debreczen.
Strompf László, gymn. tanár, Aszód.

350 Suták József dr., főgymn. tanár, Budapest, IV., Városház-tér.
Süss Nándor, mech. t., m. igazg., Budapest, II., Alkotás-u. 16.
Szabó Gábor, tanár, IX., Csillag-u. 6.
Szabó János, kegy. r. tanár, M.-Sziget.
Szabó József, kegy. r. tanár, Vácz.
355 Szabó József, polg. isk. igazg., Budapest, I., Polg. isk.
Szabó Lajos, tanár, Aszód.
Szabó Péter, tanár, Budapest, I., Győri-út 1. II. 15.
Szakmáry József, főgymn. ny. igazg., Beszterczebánya.
Szalay István, főgymn. tanár, Szentes.
360 Szántó Ignácz, met. int. adjunktus, Budapest, II., Fő-u. 6.
Szathmáry Jenő, tanár, Békés.
Száva József, technikus, tanárjelölt, Budapest, V., Holdu. 19.
Szavkay Ede, főgymn. tanár, Budapest, V., Kálmán-u. 24.
Széchy Ákos, keresk. akad. tanár, Kolozsvar.
365 Székely Károly, főgymn. tanár, Baja.
Székely László, tanár, Budapest, VIII., Pál-u. 6.
Szekeres Kálmán dr., főreálisk. tanár, VI., Nagy-János-u. 22. II.
Széky István, főgymn. tanár, Gyöngyös.
Szemethy Béla, főgymn. tanár, Budapest, VII., Barcsay-u. 5.
370 Szenessy Mihály, polg. isk. igazg., Budapest, II., Medve-u. 5.
Szentmiklósy Jenő, főgymn. tanár, Gyulafehérvár.
Szépréthy Béla,főreálisk.tanár,Brassó.
Szerémi Alajos, felső-leányisk. tanár, Budapest, VI., Váczi-körut 23.
Szerényi Géza, főgymn. tanár, Budapest, VII., Wesselényi-u. 49.
375 Szijjártó Miklós, főgymn. tanár, Budapest, VIII., Német-u. 34.
Szily Kálmán, min. tan., a m. t. akadémia főtitkára, vál. tag, Budapest, V., Akadémia.
ifj. Szily Kálmán dr., műegyet. adjunktus, p. t., Budapest, V., Akadémia.
Szirtes Ignácz, főreálisk. tanár, Budapest, VI., Bulyovszky-u. 22.
Szokol Pál dr., kir. bányaisk. igazg., Felsőbánya.
380 Szontágh Gusztáv, főreálisk. tanár, Brassó.
Szőke Béla, tanár, Budapest, VI. ker., Kmetty-u. 9.
Szuppan Vilmos, kir. tanácsos, keresk. akad. igazg., Budapest, V., Széchenyi-u. 1.
Szupper Mártha, Budapest, Erzsébet Nőiskola, VII., István-út 93.
Takáts Gyula, állami reáliskolai tanár, Sümeg.
385 Tangl Károly dr., igazgató, Budapest, VIII. Köztemető-út 20/a.
Tasch Antal, adjunctus, Ó-Gyalla, Komáromm.
Tatár Balázs, gymnasiumi tanár, Nagy-Szalonta.
Terkán Lajos dr., adjunktus, Ó-Gyalla.
Terlanday Emil, szt. Benedek-rendi tanár, Budapest, VIII., Szentkirályi-utcza 3. III. 25.
390 Thán Károly dr., min. tan., egyet. tanár, vál. tag., Budapest, VIII. ker., Muzeumkörut 4.
Thanhoffer Lajos dr., egyet. tanár, Bpest, V., Ferencz József-rakp. 13.
Tihanyi Miklós, sz. B. r. tanár, Sopron.
Tolnay Lajos, min. tan., Budapest, IX., Üllői-út 19.
Torday Imre, ipari szakisk. igazg., Budapest, II., Lánczhíd-u. 1—3.
395 Toth Balázs, tanár, Privigye.
Török Sándor egyet. hallg. Kolozsvár, Egyetem-u. 10.
Tőtössy Béla műegyet. tanár, vál. tag, Budapest, VIII., Műegyetem.
Vályi Gyula dr., egyet. tanár, t., ö. Kolozsvár.
Vámos Dezső felső-iparisk. tanár, VIII., Népszinház-u. 8.
400 Váncza Mihály, tanár, Budapest, VI., Nagymező-u. 40. III.
Vater József, műsz. tanácsos, Budapest, II., Albrecht-út 3—5.
Visnya Aladár, tanár, Nagyvárad.
Vörös Cyrill, k. r. főgymn. tanár, Nagy-Kanizsa.
Wagner Alajos dr., főgymn. igazg., vál. tag, Budapest, V., Markó-u.
405 Waldapfel János dr., főgymn. tanár, Budapest, VIII., Trefort-u. 8.
Walther Béla, reálisk. igazg., Lőcse
Wartha Vincze dr. min. tan., műegy. tanár, Budapest, VIII., Műegyetem.
Wéber Márton, cziszt. r. főgymn. tanár, Zircz.
Weisz Margit, tanárjelölt, Kolozsvár, Rózsa-u. 2.
410 Willim Ferencz, főgymn. tanár, Lugos.
Winkler Lajos dr., egyet. m.-tanár, Budapest, VIII., Vegytani intézet.

Winter József, főgymn. tanár, Budapest, VII., Dembinszky-u. 34.
Wittmann Ferencz, műegyet. tanár, Budapest, IV., Zöldfa-u. 15.
Wodeczky József, nevelő, Szentegát, (Szigetvár mellett).
415 Závodszky Adolf, főreáliskolai tanár, Budapest, V., Markó-u.
Zemplén Győző dr., adj., Budapest, VIII., Eszterházy-u. 3.
Zettner Ede, polg. isk. igazg., Budapest.
Zilahy László, tanárjelölt, Kolozsvár, Deák-Ferencz-u. 14.
Zipernovszky Károly, műegyet. tanár, Budapest, II., Fő-u. 73.
420 Zorkoczy Samu, ev. lyc. igazg., Pozsony.

II. A Math. és Phys. Lapok előfizetői:

Aradi áll. főreáliskola.
Aradi áll. tanitónőképző.
Aradi kir. főgymnasium.
Bártfai áll. főgymnasium.
5 Békés-Csabai ev. ref. Rudolf főgymn.
Beregszászi állami főgymnasium.
Brassói áll. főreáliskola.
Brassói r. kath. főgymnasium.
Budapesti áll. polg. iskolai tanitónőképző, I., Győri-u. 9. Pædagogium.
10 Budapesti III. k. áll. főreáliskola, II., Toldi Ferencz-u.
Budapesti V. k. áll. főreáliskola, V., Markó-u.
Budapesti VI. k. áll. főreáliskola, VI., Bulyovszky-u. 22.
Budapesti VI. k. áll. főgymnasium, VI., Lovag-u. 16.
Budapesti VIII. k. áll. főgymnasium, VIII., Tavaszmező-u.
15 Budapesti Premontrei tanárképző, »Norbertinum«, VIII. Mária-u. 20.
Budapesti Tanárképző int. gyakorló főgymn. VIII., Trefort-u. 8.
Csiksomlyói r. kath. főgymnasium.
Debreczeni állami főreáliskola.
Deési állami főgymnasium.
20 Dévai áll. főreáliskola.
Egri állami főreáliskola.
Fogarasi áll. főgymnasium.
Győri áll. főreáliskola
Gyulafehérvári róm. kath. főgymnasium.
25 Heumann Mór könyvkereskedő, Szabadka.
Hajdú-Böszörményi ev. ref. főgymn.
Jászberényi kir. kath. főgymn.
Jászói prépostság könyvtára, Jászóváralja.
Kaposvári áll. főgymn.
30 Karczagi ev. ref. főgymn.
Kecskeméti áll. főreáliskola.
Késmárki ág. hitv. ev. lyceum.
Kilian Frigyes utóda, Budapest IV., Váczi-u. 1.
Kolozsvári kegy. rendi Kalazantinum.
35 Körmöczbányai áll. főreáliskola.
Lőcsei áll. főreáliskola.
Makói áll. főgymnasium.
Mármarosszigeti ev. ref. főgymn.
Mérnök-épitész-egylet, Budapest IV., Ujvilág-u. 2.
40 Miskolczi ev. ref. főgymn.
Nagyenyedi Bethlen főiskola.
Nagyváradi áll. főreálisk.
Naszódi alapitv. főgymn.
Nyitrai alapitv. felsőbb leányiskola.
45 O-Gyallai m. kir. orsz. meteorologiai és földmágnességi központi observatorium.
Pannonhalmi főapátsági könyvtár.
Pfeiffer Péter könyvkereskedő, Bpest, IV., Kossuth Lajos-u.
Podolini kegy. rendi gymnasium.
Privigyei kegy. rendi gymnasium.
50 Pozsonyi áll. főreáliskola.
Pozsonyi kir. kath. főgymnasium.
Rosenthal Márk és fiai könyvkeresk. Mohács.
Selmeczbányai kir. kath. főgymn.
Sepsi-szt-györgyi ev. ref. főgymn.
Soproni ág. hitv. ev. lyceum.
55 Soproni áll. főreáliskola.
Soproni szt. B.-rendi főgymn.
Szabadkai közs. főgymn.
Szakolczai főgymn.
Szamosujvári áll. főgymn.
60 Szarvasi ág. h. ev. főgymn.
Szászvárosi ev. ref. Kun-kollegium.
Szegzárdi áll. főgymn.
Szekely-udvarhelyi áll. főreáliskola.
Székely-udvarhelyi r. kath. főgymn.
65 Székesfehérvári áll. főreálisk.
Szepesiglói áll. tanitóképző.
Temesvári áll. főgymn.
Temesvári áll. főreálisk.
Ujvidéki kir. kath. főgymn
70 Ungvári áll. főreáliskola
Ungvári kir. kath. főgy
Zilahi ev. ref. főgymn

International Journals from Hungary

ANNALES UNIVERSITATIS SCIENTIARUM BUDAPESTINENSIS
DE ROLANDO EÖTVÖS NOMINATAE

Sectio: MATHEMATICA
Vols. 1-9 1958-1966 mostly reprinted

unbound	per Vol	US $	8,-

PUBLICATIONS OF THE MATHEMATICAL INSTITUTE
OF THE HUNGARIAN ACADEMY OF SCIENCES

O. S. Vols. 1-3. 1952-1954 all publ. Partly reprinted
N. S. Vols. 1-9. 1956-1965 all publ.

Unbound set	US $	110,-
Cloth bound set	US $	134,-

Continued as „STUDIA SCIENTIARUM MATHEMATICARUM HUNGARICA"

STUDIA SCIENTIARUM MATHEMATICARUM HUNGARICA

Vols. 1-2, 1966-1967

Unbound, per vol.	US $	12,-

ACTA UNIVERSITATIS SZEGEDIENSIS
ACTA PHYSICA ET CHIMICA

Series I.

„Acta Chimica, Mineralogica et Physica"
Vols. 1-7, 1929-1940 all publ.

Series II.

„Acta Chimica et Physica"
Vols. 1-3 1942-1950 all publ.

Nova Series:

„ACTA PHYSICA et Chimica"
Vols. 1-13, 1955-1967

Price of the three series together unbound	US $	170,-

ACTA PHYSICA et CHIMICA DEBRECINA

Vols. VIII-XII. (N. S. 1-5) 1962-1966

unbound per vol.	US $	6,-

Mathematical and Physical Journals in Hungarian

MATEMATIKAI ÉS FIZIKAI LAPOK

Mostly reprinted

Vols. 1–50, Budapest, 1892–1943, all published, with General Index clothbound	US $	850,-
paperbound, resp. in original issues	US $	750,-

Ample summaries in German since 1920

MATEMATIKAI LAPOK

Vols. 1–18, Budapest, 1950–1957 partly reprinted

clothbound	US $	196,-
paperbound, resp. in original issues	US $	160,-

Continues and develops the traditions of the former valuable periodical MATEMATIKAI ÉS FIZIKAI LAPOK. Published by the Bolyai Mathematical Society in Hungarian, with summaries in congress languages, bringing regularly the bibliography of Hungarian mathematical literature. Editor: Professor P. Turán.

A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA III. MATEMATIKAI ÉS FIZIKAI OSZTÁLYÁNAK KÖZLEMÉNYEI

Vols. 1–17, Budapest, 1950–1967 clothbound	US $	170,-
in original issues	US $	136,-

Publications of the Mathematical and Physical Section of the Hungarian Academy of Sciences

MAGYAR FIZIKAI FOLYÓIRAT

Vols. 1–15, 1953–1967 clothbound	US $	136,-
in original issues	US $	102,-

Physical publications of the Mathematical and Physical Section of the Hungarian Academy of Sciences

Prices are valid until December 31, 1969

Single volumes of periodicals quoted are available.
Subscription to forthcoming volumes may be entered.

„KULTURA"

Hungarian Trading Company for Books and Newpapers
Back Issues Department

BUDAPEST 62, P. O. B. 149, Hungary

Sets, runs and back volumes of periodicals published in Hungary

REPRINTS

Searching Service for out of stock journals
Xerox copies or microfilms of out of print issues

Please ask for our catalogues „PERIODICA HUNGARICA"

Orders and inquiries should be sent to above address, directly, or through any international scientific bookseller.